EUCLIDES
Vakblad voor de wiskundeleraar

januari
2002/nr.4
jaargang 77



EEN EEUW BOTTEMA
1901-1992
EEN EEUW MEETKUNDE!

orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Marja Bos
Mussenveld 137, 7827 AK Emmen
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/ formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette of per e-mail: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

www.nvvw.nl

Voorzitter
Marian Kollenveld
Leeuwendaallaan 43, 2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Elly van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Colofon

ontwerp   Groninger Ontwerpers
foto omslag   Peter Tahl, Groningen
produktie   TiekstraMedia, Groningen
druk   Giethoorn Ten Brink, Meppel

Contributie

Contributie per verenigingsjaar: € 36,50
Studentleden: € 18,00
Leden van de VVWL: € 25,00
Lidmaatschap zonder Euclides: € 25,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: € 38,50 per jaar.
Voor instituten en scholen: € 110,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor € 13,50. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

4

januari 2002   JAARGANG 77

INHOUD

Van de redactietafel

[Marja Bos]

Bottema-nummer

De redactie van Euclides heeft de 100-ste geboortedag van Oene Bottema op 25 december jongstleden aangegrepen om een bijzonder nummer samen te stellen: een nummer gewijd aan Bottema en meetkunde. Eindredacteur Dick Klingens heeft hiervoor al een jaar geleden het initiatief genomen, en het resultaat heeft u nu in handen. Veel Bottema- en/of meetkunde-fans bleken bereid iets moois op papier te zetten.
Prof. dr. Oene Bottema (1901-1992) heeft onder meer met zijn langjarige serie *'Verscheidenheden'* – korte stukjes die vaak over meetkunde gingen - veel voor Euclides betekend. Zijn boek *'Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde'* werd en wordt zeer veel gelezen. Bottema was een internationaal befaamd wiskundige, maar trok tegelijkertijd zijn sporen in het Nederlandse wiskundeonderwijs. Daarover is in deze extra dikke Euclides het nodige te lezen.

Meetkunde nu

Meetkunde is in Nederland een tijd 'buiten beeld' geweest; een hele generatie wiskundedocenten is opgegroeid zonder noemenswaardige meetkundige achtergrond. Maar dat is aan het veranderen! Vlakke meetkunde is bijvoorbeeld terug in het examenprogramma wiskunde B2 vwo, en ook daarbuiten lijkt de belangstelling weer sterk te groeien. Misschien is dat wel mede dankzij de fantastische mogelijkheden van diverse interessante dynamische meetkundesoftware zoals Cabri en allerlei bewegende applets op het internet.
Mocht u nog niet meetkunde-enthousiast zijn, dan wordt u het vast. Naast een aantal artikelen voor de 'gevorderde' (met in de bijdrage van Floor van Lamoen zelfs een aantal interessante recente resultaten) vindt u in dit nummer ook meerdere insteken voor de 'beginneling' op het gebied van de meetkunde.

Het B-team

Kent u *'The A-team'* nog, die tv-serie van een aantal jaren terug? De hoofdfiguren: een paar heldhaftige redders in de nood, voor geen kleintje vervaard!
Voor dit bijzondere nummer had de redactie een speciaal team van kritische lezers samengesteld om de binnengekomen bijdragen te becommentariëren: het Bottema-team, binnenskamers ook wel *het B-team* genoemd. Dit fantastische team bestond uit Martinus van Hoorn, Chris van der Heijden, Herman Bloem, Jan Smit en Dick Klingens. Speciale dank gaat naar hen uit!

Redactie

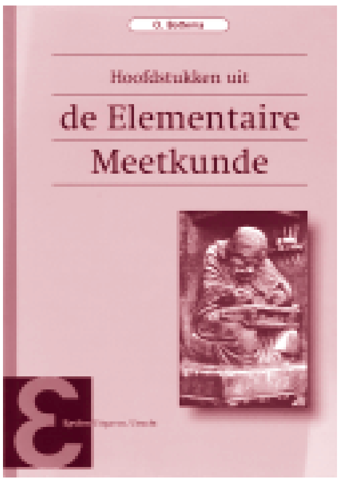
De redactie ondergaat op dit moment enige wijzigingen. Om uiteenlopende redenen hebben we afscheid moeten nemen van Jan de Geus, Wim Knoester-Doeve en Johannes Sinnema. Jan heeft jarenlang de recreatierubriek verzorgd; de schare enthousiaste puzzelaars zal hem missen! Wij zijn op zoek naar een waardig vervanger. Mocht u zelf interesse hebben of ons een suggestie willen doen, het redactie-adres vindt u op de bladzijde links.
Ook Wim en Johannes hebben een substantiële bijdrage aan Euclides geleverd.
Jan, Wim, Johannes: bedankt voor jullie inzet; het ga je goed!



VOORAF AAN 'EEN EEUW BOTTEMA 1901-1992 EEN EEUW MEETKUNDE!'

[Dick Klingens]

Niet van elke Nederlandse wiskundige houd ik de geboortedatum bij. Die van Bottema, 25 december 1901, 100 jaar geleden, behoort echt tot de uitzonderingen. Waarom?
Door wie mij de liefde voor de meetkunde is bijgebracht, kan ik niet zo duiden. Mijn docent wiskunde in de vijfde en zesde klas van de middelbare school, Drs. H. Pleijsier, was in ieder geval een van hen. Naar ik me herinner was hij degene die me aanried Bottema's *Hoofdstukken* eens te bekijken: 'Niet eenvoudig, maar het laat zich eenvoudig lezen'. En daardoor (het zal 1961 of 1962 zijn geweest) maakte ik voor het eerst kennis met de negenpuntscirkel, de rechte van Euler, ..., en al die andere fraaie driehoekseigenschappen. *Hoofdstukken* was dan ook een van de eerste wiskundeboeken die ik kocht, en tijdens m'n wiskundestudie kwam de naam 'Bottema' ook bij herhaling terug - via zijn *Verscheidenheden* in Euclides en zijn artikelen in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde.
Niet dat ik daarvoor heb zitten wachten op het jaar 2001, maar eenmaal toegetreden tot de redactie van Euclides, kon (of mocht) ik eigenlijk niets anders dan opperen een Bottema-nummer te maken ter gelegenheid van zijn 100-ste geboortedag. Echter, het voorstel is zeker ook ingegeven door het feit dat we in het vwo weer echte meetkunde mogen doen.
Het was verheugend te merken dat - na een oproep om aan zo'n Euclides-aflevering mee te werken – velen dat initiatief waardeerden en daadwerkelijk toezegden een artikel over Bottema, over de meetkunde of over Bottema en de meetkunde te schrijven. Hun werk vindt u op de hierna volgende pagina's.



In Euclides verschenen in de jaren 1945-1977 honderd *Verscheidenheden*, korte stukjes wiskunde, werk van de hand van Bottema. Van diverse kanten is voorgesteld het boekje te herdrukken, ja zelfs alle *Verscheidenheden* ter gelegenheid van Bottema's honderdste geboortedag opnieuw uit te geven. De redactie is niet ongevoelig voor een dergelijke suggestie en wil dan ook een heruitgave op CD-rom in overweging nemen. Lezers kunnen hun belangstelling hiervoor kenbaar maken met een berichtje aan de redactie (per e-mail of gewone post; zie het colofon voor de adressen).

Dat meetkunde vooral ook mooi, en soms niet eenvoudig, is, kunt u op de volgende pagina's (opnieuw) ervaren; maar zeker ook dat het werk van Bottema nog heden ten dage als basis kan dienen voor creativiteit van anderen.
Dank van de redactie gaat daarom naar de auteurs, in het bijzonder ook naar de heer Rinze J.W. Bottema die welwillend enkele foto's van zijn vader ter beschikking stelde.
En er gaat een wens naar de lezers van dit blad: veel leesgenoegen!



OVER DE VERSCHEIDENHEDEN VAN PROF. DR. O. BOTTEMA

[Bert Zwaneveld]

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA.

I. EEN n-HOEK IS DOOR $2n - 3$ GEGEVENS BEPAALD.

De hierboven genoemde stelling wordt in de leerboeken der vlakke meetkunde veelal op de volgende wijze bewezen. Men trekt de $(n - 3)$ diagonalen uit een der hoekpunten, waardoor de veelhoek in $(n - 2)$ driehoeken verdeeld wordt. De redenering is dan deze. Voor de constructie van de eerste driehoek zijn drie gegevens nodig. Is deze driehoek gevonden, dan is van de tweede driehoek een zijde bekend. Ook de tweede driehoek is door drie gegevens bepaald. Naast de gegeven zijde moet men. dus nog over $3 - 1 = 2$ andere gegevens beschikken. Ook elke volgende driehoek vraagt twee nieuwe gegevens. Het totale aantal is dus $3 + (n - 3) . 2 = 2n - 3$.

Dit bewijs is niet correct, ook afgezien van de moeilijkheden, die aan de begrippen "een gegeven" en "een figuur bepalen" verbonden zijn. Bij de redenering heeft nl. een verwarring plaats tussen de twee betekenissen, die men in de elementaire meetkunde aan de uitdrukking "deze figuur is bepaald door g gegevens" pleegt te hechten. Wanneer men zegt, dat een driehoek door drie gegevens bepaald is en ook dat een cirkel door drie gegevens bepaald is, dan zijn dat onvergelijkbare uitspraken. Immers in het eerste geval ziet men geheel af van de plaats, die de figuur in het vlak inneemt, richt alleen zijn aandacht op de eigenschappen, die bij een plaatsverandering invariant blijven en beschouwt onderling congruente driehoeken als "dezelfde" oplossing der constructieopgave. In het tweede geval is bedoeld, dat niet alleen de afmetingen van de cirkel, maar ook zijn plaats door de drie gegevens volkomen is vastgelegd. Bij het onderwijs geeft het weglaten van de onderscheiding tussen de beide soorten opgaven, zoals dat gemakshalve zeer dikwijls plaats vindt, over het algemeen weinig moeilijkheden, omdat uit het verband de bedoeling meestal wel duidelijk is. Toch zou het misschien raadzaam zijn om op het onderscheid wat meer de aandacht der leerlingen te vestigen dan gebruikelijk schijnt. De redactie der opgave moet met grote zorgvuldigheid verricht worden; een kleine wijziging in der tekst doet de opgave verglijden van de ene categorie naar de andere. Wordt de constructie verlangd van een driehoek waarvan de basis, de tophoek en de hoogte gegeven zijn, dan is waarschijnlijk een opgave van de eerste categorie bedoeld; vraagt men met een gegeven lijn tot basis een driehoek te construeren, die nog een gegeven tophoek en een gegeven hoogte bezit, dan ligt vermoedelijk een opgave van de tweede soort voor ons. De uitvoering van de constructie verloopt in beide gevallen op dezelfde wijze, maar dat wij met verschillende opgaven te doen hebben blijkt uit de discussie: in het eerste geval is het aantal oplossingen hoogstens een, in het tweede hoogstens vier.

Wij zijn in het wiskunde-onderwijs tegenwoordig zorgvuldiger en nauwkeuriger dan enige decennia geleden, besteden meer tijd aan zuivere redactie en streven naar een betere nomenclatuur. Men behoeft niet blind te zijn voor de nadelen, welke een overdreven aandacht voor de vorm met zich brengt om te besluiten, dat een scherpere onderscheiding van de twee soorten constructieopgaven wenselijk is. In de stelling, die ons bezig houdt, is het verwaarlozen van deze onderscheiding oorzaak van een redenering. die men niet anders dan onjuist kan noemen. De constructie van de n-hoek is bedoeld ongeacht zijn plaats in het vlak; de eerste driehoek kan dus in willekeurige stand worden geconstrueerd en eist inderdaad drie gegevens. Bij de tweede en bij de volgende driehoeken hebben wij echter met constructieopgaven te doen, welke ten duidelijkste tot de tweede categorie behoren. Daarbij is een driehoek bepaald door zes gegevens; van zo'n driehoek zijn twee hoekpunten reeds bekend, die elk twee gegevens vertegenwoordigen. Het aantal voor de tweede driehoek nodige nieuwe gegevens bedraagt dus inderdaad twee, maar dit geval ontstaat, als het verschil van zes en vier en niet als dat van drie en één.

Men kan natuurlijk tot de formule $2n - 3$ eenvoudiger komen door de overweging, dat een punt in het vlak door twee gegevens en dus een n-hoek door $2n$ gegevens bepaald is, terwijl het aantal verplaatsingen ∞^3 bedraagt, waarbij dan nog opgemerkt moet worden, dat er niet (zoals bijv. in het geval van de rechte of de cirkel) oneindig veel verplaatsingen zijn, waarvoor de n-hoek invariant is. Dit bewijs is echter voor de betrokken leerlingen, althans in het stadium, waarin zij verkeren, als zij voor het eerst met de stelling kennis maken, misschien minder geschikt.

Stelt men zich op het standpunt, dat men een figuur wil construeren niet alleen onafhankelijk van haar plaats in het vlak, maar ook onafhankelijk van haar grootte, dus beschouwt men onderling gelijkvormige figuren als "dezelfde", dan is het aantal gegevens, dat een n-hoek bepaalt, blijkbaar $2n - 4$, omdat er in het vlak ∞^4 gelijkvormigheidstransformaties bestaan. De eerste driehoek eist twee gegevens, de volgenden elk $6 - 4 = 2$. Het gesignaleerde bewijs zou voor dit geval geheel mislukken en deze opmerking kan er misschien toe bijdragen om in te zien, dat het inderdaad incorrect is.

Tussen 1945 en 1977 verschenen in Euclides honderd Verscheidenheden van de hand van Prof. Dr. O. Bottema. Zij verschenen onregelmatig, soms een of geen in een aflevering van Euclides, soms wel drie tegelijk. Nadat Bottema het aantal van honderd had vol gemaakt zijn er in 1977, op initiatief van de redactie van Euclides, vijftig gebundeld en in een boekje verschenen dat uitgegeven is door de NVvW. Het boekje is samengesteld door Dr. J.T. Groenman, overigens in overleg met Bottema. Om een indruk te krijgen van de inhoud van de Verscheidenheden volgt hier een deel van het Voorbericht bij de bundel met de vijftig geselecteerde Verscheidenheden.

Het centrale thema van de Verscheidenheden is de meetkunde. De belangstelling van de auteur beslaat echter een veel ruimer gebied. Sommige Verscheidenheden gaan over de mechanica, andere zijn van historische aard, terwijl enkele zelfs een meer literair karakter hebben.

Nu zouden we deze Verscheidenheden overigens wellicht aanduiden als ‘wiskundige columns’. De bijdragen van Jo Vaessens aan het jubileumboek van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, verschenen in november 2000, zijn een hedendaagse variant van Bottema’s Verscheidenheden.
Bij (her)lezing van de Verscheidenheden in 2001 vallen een paar dingen op. Heel vaak geeft Bottema aan dat naar zijn oordeel een en ander in de klas bruikbaar is. De lezer moet zich daarbij wel de leerlingen van de laatste twee jaar van de b-afdelingen van de hbs en het gymnasium, en later bij wiskunde II van het vwo, voor ogen stellen. Heel vaak gaat het om lang geen triviale wiskunde! De lezer moet eigenlijk steeds een potlood en papier bij de hand hebben, zelf een schetsje maken – hoewel er ook wel tekeningen bij staan –, zelf een berekening verifiëren, zelf even nadenken hoe het ook al weer zat met bijvoorbeeld de poollijn of de inversie, of zo iets zelfs even opzoeken. Maar Bottema houdt de lezer bij de hand. Dat betekent dat je er als

NASCHRIFT OP VERSCHEIDENHEDEN I.

Een n-hoek is door $2n - 3$ gegevens bepaald.

Naar aanleiding van mijn uiting dat het gebruikelijke bewijs voor deze stelling niet geheel correct zou zijn, doordat in de redenering twee soorten constructieve opgaven (eerste categorie: de liggen der figuur speelt geen rol; tweede categorie: ook de plaats der figuur moet worden bepaald) onvoldoende worden onderscheiden, heb ik van zeer deskundige zijde opmerkingen ontvangen waaruit blijkt, dat mijn bezwaar niet wordt gedeeld.

Dr L. Crijns (Maastricht) en Dr B.P. Haalmeyer (Barneveld) waren nl. zo welwillend mij hun oordeel mede te delen; met hun toestemming worden hier hun meningen weergegeven.

Dr Crijns schrijft onder meer: “Na de constructie van de eerste driehoek Δ_1 kan men met meeneming van de gemeenschappelijke zijde z de tweede driehoek Δ_2 afgescheiden en onafhankelijk van Δ_1 opbouwen; in gevallen, waarbij de twee gegevens van Δ_2 slechts in zeer verwijderd verband met z staan, is men zelfs gedwongen, Δ_2 op een afzonderlijke plaats te construeren. Dat men daarna Δ_2 tot aansluiting aan Δ_1 moet brengen, stempelt de constructie niet tot een van een andere soort. Want dan zou elke constructie van elke driehoek (en van elke figuur) tot die soort gerekend moeten worden: immers na afpassing van de basis of een andere zijde moet de rest in aansluiting daaraan tot stand komen. En voor de constructies in gelijkvormigheid gelden analoge opmerkingen.” En de schrijver licht in een later schrijven zijn betoog toe met het naast elkaar stellen van de volgende opgaven 1) construeer vierhoek ABCD als de vier zijden en hoek B gegeven zijn, 2) construeer driehoek ABC als de zijden gegeven zijn. Voor 1) kan men eerst de driehoek ABC op een willekeurige plaats construeren en daarna uit A resp. C met AD resp. CD omcirkelen; voor 2) kan men AB op een willekeurige plaats construeren en daarna uit A en B met AC en BC omcirkelen. De analogie van de beide constructies is volkomen en zij kunnen dus niet tot twee verschillende categorieën behoren.

De opmerkingen van Dr. Haalmeyer gaan voor een deel dezelfde richting als die van Dr. Crijns. Alvorens ze weer te geven is het mij een behoefte te getuigen, dat Dr. H. wel de laatste is, wie ik een onvoldoende onderscheiding van de beide categoriën van opgaven zou durven verwijten, daar deze in zijn voortreffelijk *Leerboek der Vlakke Meetkunde* wel meer dan in de meeste andere leerboeken geschiedt op het verschil der beide soorten de aandacht heeft gevestigd, overigens met een wijze, door de didactische eisen geboden, gematigdheid.

Dr Haalmeyer schrijft o.a. “Na constructie van den eersten driehoek is een zijde van den tweeden bekend. Gebruikt men deze zijde bij de constructie van den tweeden driehoek, dan is er m.i. niets tegen bij eventueele overbrenging dier zijde, den daaraan vastzittenden eersten driehoek meegevoerd te denken. Verder kan dat ook met den vierhoek enz. geschieden. Mij dunkt, er is geen noodzaak aan een geconstrueerden drie- of veelhoek een assenstelsel of iets dergelijks vast te maken, ten opzichte waarvan deze niet meer van plaats mag veranderen. Bij een lijnstuk pleegt men dat toch ook niet te doen. Natuurlijk kan men ook de driehoeken apart construeren en later samenvoegen.” En in een later schrijven: “Beschouwen we eens de constructie van een driehoek, welks zijden gelijk zijn aan drie gegeven lijnstukken. Men begint met ergens een lijnstuk te construeren, gelijk aan een der gegeven segmenten. Daarbij is men vrij in de plaats en hiermee is toch wel, wat er verder ook gedaan wordt, het vraagstuk erkend als behoorende tot de eerste categorie.”

Als ik aan deze zeer gewaardeerde opmerkingen een enkel woord mag toevoegen, wil ik eerst vaststellen, dat ik geenszins de constructie van een driehoek tot de eerste en die van een n-hoek ($n > 3$) tot de tweede categorie wil rekenen, zoals men uit de toelichting van Dr Crijns zou kunnen opmaken. De constructie van de n-hoek, in zijn geheel beschouwd, behoort tot de eerste categorie. Zodra men echter de constructie ontleedt en daarbij over de willekeurigheid der ligging eenmaal beschikt heeft, is de rest van de constructie, op zichzelf beschouwd, er één van de tweede categorie en bij telling van het aantal gegevens waarover men bij uitvoering dezer restconstructie mag beschikken, dient men daarmee rekening te houden. Dr Crijns en Dr Haalmeyer wijzen beide op de constructie van de driehoek met gegeven zijden. Ik ben het met deze beschouwingen volmaakt eens. Deze constructie, in zijn geheel beschouwd, is natuurlijk van de eerste categorie; heeft men echter een der zijden ergens vastgelegd, dan is het vervolg der opgave van de tweede: zij eist immers de constructie van een punt, dat gegeven afstanden heeft tot twee gegeven punten. Bij het bewijs van de stelling, die ons bezighoudt, is het nu eenmaal gebruik, de figuur in driehoeken te ontleden en het aantal gegevens van een driehoek bekend te veronderstellen. Ik meen dus, zonder aan de zaak overigens een overdreven waarde te hechten, te moeten volhouden dat het correcter is om te zeggen dat van elke volgende driehoek twee hoekpunten bekend zijn, dan dat een element (n.l. een zijde) gegeven is, zodat het getal 2 verkregen wordt als $6 - 4$ en niet als $3 - 1$. Omdat mijn opmerkingen over gelijkvormigheidsconstructies blijkbaar geen grote indruk heeft gemaakt, wil ik tot mogelijke verduidelijking nog het volgende voorbeeld geven.

Hoeveel gegevens heeft men nodig om de vijfhoek ABCDE te construeren? De driehoek ABC is door drie gegevens bepaald, de restconstructie is van de tweede categorie. Driehoek ADE eist dus 6 gegevens; omdat echter het hoekpunt A in ligging gegeven is, vermindert dit aantal tot $6 - 2 = 4$. Voor het geheel zijn dus 7 gegevens nodig.

lezer op kunt vertrouwen dat je, als je gewoon de onverwachte dingen volgt (zoals het invoeren van een bepaalde variabele, het berekenen van een discriminant, het op een bepaalde, soms zeer verrassende wijze kiezen van een coördinatenstelsel, om een paar onverwachte wendingen te noemen), altijd bij interessante resultaten komt. Nu moet natuurlijk niet uit het oog worden verloren dat in de periode waarin Bottema zijn Verscheidenheden schreef, iedere wiskundeleraar aan een hbs of gymnasium nog zeer doorkneed was in de meetkunde: de vlakke meetkunde en de stereometrie, de trigonometrie en de analytische meetkunde, en zelfs de projectieve meetkunde.

Tot slot van deze kleine bijdrage, naast de hierbij opgenomen overdrukken (I en LVII, [1]), een paar voorbeelden.
In Verscheidenheid XIII gaat het over Jules Verne en diens *Reis naar de maan*. Bottema neemt de mechanica van de door Verne beschreven maanreis onder de loep: soms blijkt die te kloppen, soms niet. Echt iets om met leerlingen in de klas te doen.
Verscheidenheid LVI is getiteld *Euler, altijd weer Euler*. In deze Verscheidenheid gaat het over het benaderen van π door middel van een rij veelhoeken, niet een rij om- en ingeschreven veelhoeken bij dezelfde cirkel, maar een rij waarbij elke veelhoek in de rij zo bepaald wordt dat deze dezelfde omtrek heeft als zijn voorganger. In deze Verscheidenheid komt geen tekening voor. Overigens komt Euler heel wat vaker in de Verscheidenheden voor. Kennelijk was hij voor Bottema een groot voorbeeld.
Van een heel ander karakter is Verscheidenheid XXI, verschenen in 1948. Daarin bespreekt hij de toonaangevende wiskundigen van het Europese revolutiejaar 1848: Jacobi, Bessel, Grassmann, Poncelet, Dirichlet, Steiner, Kummer, Liouville en Kronecker, om er een aantal te memoreren.
Een van de alleraardigste Verscheidenheden is de

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. Bottema

LVII. WISKUNDE IN DE BEELDSPRAAK

In de tegenwoordige en in vroegere wiskunde wordt veel *afgebeeld*, al leert men al jong dat afbeeldingen in de dagelijkse betekenis van het woord wel het denken mogen begeleiden, maar overtuigingswaarde ontberen. Voor *beeldspraak* daarentegen is in het vak geen plaats. Deze stijlfiguur mist de exactheid die in de wiskunde naar naam en wezen het gebod is en zij kan hoogstens bij een mondeling betoog soms even door de associaties die zij wekt een uitleg verhelderen. Het komt echter voor in de wiskunde dat een wel gedefinieerd begrip of proces een naam krijgt, die een *beeld* oproept van een voorwerp waaraan het op een of andere wijze herinnert, zoals de *waaier* voor de verzameling der rechten door één punt en in één vlak, de *draak* of *vlieger* (-vierhoek) en de *zeef* van Eratostenes. Bij een *nest* van intervallen hebben wij, neem ik aan, met een herhaald beeld te doen dat via het keukengerei op de oorspronkelijke betekenis terug gaat. Wij kunnen begrijpen dat men in de vlakke kinematica aan een verzameling baanrechten, waarlangs zich punten bewegen, de naam *emplacement* wil geven. Bij *ketting*breuken en *tweeling*-priemgetallen is de afstand tussen beeld en origineel voor mijn gevoel al groter en bij de *lichamen* en de *ringen* der algebra zeggen de woorden weinig of niets meer. Een *net* van krommen op een oppervlak (met al of niet infinitesimale *mazen*) heeft een meer beeldende naam, dan de lineaire collectie van ∞^2 vlakke kromrnen, die eveneens zo heet. Fraai is *schoof* voor alle rechten door een punt in de ruimte, maar *bundel* en *schaar* zeggen weinig meer dan nogal wat en het *kluwen* en het *legioen*, door Barrau zonder bijval voorgesteld, zijn alleen maar mooie namen voor heel veel van eenzelfde soort.

Laat ons overigens niet vergeten dat het gehele doopregister van de namen in de mathesis een overblijfsel is van de nationale gedachte in een interstellaire wetenschap. Wij leven in een onvolmaakte tijd, die nog het monnikenwerk verricht van wiskundeboeken vertalen, maar gelukkig: soldaat 370702026, het algol, het proza van de *Principia mathematica*, de dienstdoende agent 64 en het verslag van een schaakpartij zijn de lentebođen van een betere toekomst.

Geen beeldspraak dus in de wiskunde. Maar hoe staat het met de wiskunde in de beeldspraak? Wij denken daarbij niet aan de metafoor des dichters, die gewaardeerd wordt wegens haar oorspronkelijkheid en het element van verrassing, maar aan het tegengestelde: de gecodificeerde beeldspraak, die men aanduidt met staande uitdrukking, aan de taalcliches die onze dialogen versieren en een instrument zijn der journalisten. In het voortreffelijke tijdschriftje Onze Taal werd onlangs de opvatting verdedigd, dat deze middelen alle stammen uit een vroegere tijd. Inderdaad moet men toegeven dat het bakken van zoete broodjes, het verliezen van draden en het kwijtraken van klutsen herinneren aan ambachten en bezigheden met een lang verleden. Maar de stelling bleek onhoudbaar want een volgend nummer gaf voorbeelden van onmiskenbaar in onze jaren ontstane zegswijzen. Tussen twee instanties kan met voorbijgaan aan de formele verbindingen een (wel eens gunstige) *kortsluiting* ontstaan en een voorzichtige regering plaatst soms moeilijke problemen in *ijskasten*. De toenemende maat- schappelijke betekenis van de wiskunde geeft daarom aan haar terminologie een kans om de Nederlandse taal te verrijken, zoals de zeilvaart en de zuivelwinning dat al eerder deden.

Drie dagen volgehouden systematische waarneming van het gesproken en het geschreven woord gaf enig voorlopig resultaat. Wij gaan er aan voorbij dat meer dan één spreker gemiddeld één maal per zin het invoegsel *dus* gebruikte zonder dat het een aanwijsbare functie vervulde; enig verband met de voorname betekenis van dit woord in de mathesis leek niet aanwezig. Zowel op een feestavond als in de carriere van een beroemd persoon werd een *hoogtepunt* aangewezen, maar het correspondeerde niet met de meetkundige merkwaardigheid. Punten komen overigens in het algemeen veel voor; soms *sec* ("dit is 't punt"), maar ook als *keerpunt* en *brandpunt*; het *zwaartepunt* wordt zoals men weet bij voorkeur gelegd. Twistpunten en knelpunten zijn bij ons onbekend. Misleidend zijn de elkaar *kruisende* levenspaden, die het tegengestelde uitdrukken van de kruisende lijnen der voormalige stereometrie. (Onze meetkundige terminologie is hier echter weinig gelukkig en zij staat achter bij *skew* en *windschief*; een mooi woord ware scheluw, scheel. schel, wat men zegt of zei van ladders die uit vorm zijn).

Onnodig te zeggen dat in drie etmalen veel gedifferentieerd en nog meer geïntegreerd wordt. Een onzer literaire essayisten, overeenkomst aanwijzend tussen Dostojewski en Nietzsche merkt op: wij zouden hier liever van *raakpunten* dan van *parallellen* spreken; de wiskundige zal de alternatieven wat ongelijkwaardig vinden, maar hij is dankbaar een voortreffelijk stylist met meetkundige termen te kunnen bijstaan.

Twee uitdrukkingen, respectievelijk aan de reken- en de meetkunde ontleend, komen tegenwoordig zo veelvuldig voor dat de enquêteur de *tel* kwijtraakte: *onder* (of op) *één noemer brengen* en *in één vlak liggen*.

Er is een verouderde Duitse zegswijze: *das geht in die Brüche*, het wordt te moeilijk, ik kan er niet meer bij, men kan het met gewone getallen niet af. Welk een vooruitgang in algemene ontwikkeling: de *breuk* is als dagelijks beeld volkomen aanvaard. Meningen, theorieën, verschijnselen, uitspraken, definities, tegenstellingen worden met graagte onder één noemer gebracht. De uitdrukking geeft enerzijds een besef van de gebrokenheid onzer samenleving, anderzijds van een behoefte aan synthese. Soms stelt een schrijver vast dat twee

laatste, C, die de titel *Geen commentaar* heeft. Daarin citeert hij drieendertig over het algemeen heel bekende mensen, lang niet allemaal wiskundigen. Citaat nummer 8 in die lijst, een negentiende-eeuwse zegswijze van een anoniem iemand luidt:

Mathematicus non est collega.

We mochten willen dat we Bottema, die niet alleen wiskundeleraar was geweest maar die daarna tijdens zijn hoogleraarschap elk jaar opnieuw de eindexamens vóór afname screende, af en toe nog als collega zouden hebben.

Over de auteur

Bert Zwaneveld (e-mailadres: Bert.Zwaneveld@ou.nl) is sinds 1967 wiskundeleraar, eerst in het voortgezet onderwijs en sinds 1986 bij de Open Universiteit Nederland. In 1999 is hij gepromoveerd op een vakdidactisch proefschrift, Kennisgrafen in het wiskundeonderwijs, over het (leren) structureren van wiskundige kennis en vaardigheden. Daarnaast is hij actief in het wiskundeonderwijs (geweest): eerst als lid van de didactiekcommissie van de NVvW, daarna als voorzitter van de redactie van Euclides (in de jaren zeventig van de vorige eeuw hield dat tevens het hoofdredacteurschap in), en sinds 1997 als voorzitter van de vaksectie wiskunde-A van de CEVO.

Noot

[1] Verscheidenheid I uit: Euclides 21 (1945-1946), pp.13-15 en pp.51-53
Verscheidenheid LVII uit: Euclides 39 (1963-1964), pp.307-309

opvattingen onmogelijk onder een noemer zijn te brengen; hier kondigt zich reeds vaag de notie van het irrationale getal aan. Wij beperken ons tot één aanhaling. In een uitstekende, aan taalverschijnselen gewijde rubriek in een weekblad, bespreekt de auteur de woorden "waar maken" en "bewaarheden" en hij vervolgt: "hier moeten wij ermee volstaan, de term eens op z'n betekenis te onderzoeken om te zien of die betekenissen tot een gemeenschappelijke noemer herleid kunnen worden".

Naast de gebrokenheid, de gelaagdheid, de stratificatie. Wij hebben het politieke vlak, maar ook het economische en het organisatorische vlak. Deze ontwikkelingen, lees ik, liggen alle in het technische vlak.

De regering overweegt maatregelen in het vlak der eierexportbeperkingen. De vraagstukken kunnen niet op deze wijze opgelost worden, want de knelpunten liggen in een heel ander vlak. Het vlak der ministeriële verantwoordelijkheid. Het vlak van het betaalde voetbal.

Elk verschijnsel in het leven blijkt zo zijn eigen vlak te hebben. Van snijdende vlakken wordt niet gerept. Maar in strijd met het beeld dat zich vagelijk in de ruimte gaat vormen is dan weer de mededeling dat in het raakvlak (van twee takken van wetenschap) een grote activiteit heerst. Van de planimetrische zegswijze geven wij slechts een citaat, waarin meetkundige, aerodynamische en biologische beeldspraak op verrassende en stoutmoedige wijze verbonden zijn. Bij het eeuwfeest van de wet van 1863 merkt een staatssecretaris van O.K. en W. op: "In Thorbecke's beeld hebben lager, middelbaar en hoger onderwijs geen gemeenschappelijk draagvlak, maar liggen zij naast elkaar met slechts uiterlijke raakvlakken en ontbreekt de diepere gezamenlijke wortel".

Wij voegen toe: dat is het punt.

MIJN HERINNERINGEN AAN OENE BOTTEMA

Met veel genoegen ben ik ingegaan op de uitnodiging van de redactie van het tijdschrift Euclides om een bijdrage te leveren aan de speciale aflevering ter gelegenheid van de honderdste geboortedag van prof. dr. O. Bottema (1901-1992), vanaf 1961 erelid van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, gedurende dertig jaren hoogleraar aan de Technische Hogeschool/Universiteit Delft, waarvan ruim acht jaren als Rector Magnificus, in dit geval beter te formuleren als Rector Magnae Severitatis.

[A.W. Grootendorst]

Men ontmoet in het leven zelden mensen van de signatuur van Bottema. Zelf heb ik het voorrecht gehad hem gedurende 36 jaren regelmatig te ontmoeten in tal van wisselende verhoudingen, gedurende vele jaren nagenoeg dagelijks, later -na zijn emeritaat- toch wel wekelijks, totdat zijn contacten met de wereld om hem heen teloorgingen in de schemering van zijn laatste jaren.
Wanneer ik zeg dat wij met elkaar kennismaakten in 1956, dan formuleer ik dat eigenlijk niet goed. ‘Met elkaar’ duidt namelijk op een symmetrische relatie en suggereert gelijkwaardigheid, maar zo werkte dat toen niet.
Als aankomend medewerker werd ik in 1956 bij de Rector ontboden voor een kennismakingsgesprek en dat had ook veel van een mondeling examen. Zo moest ik in tien minuten uitleggen waarover mijn promotie-onderzoek handelde, dat al twee jaren liep. ‘Vertel me dat maar eens, daar weet ik namelijk niets van,’ zo werd dit gesprek ingeleid.
Hiermee heb ik meteen al een wezenlijke trek in het karakter van Bottema gesignaleerd. Hij was oprecht geïnteresseerd in datgene wat een ander wist en waarmee een ander bezig was. Vooral juist als hij echt niets van andermans activiteiten wist, was hij extra belangstellend, dit in tegenstelling tot de velen die ik ontmoet heb die ervan uitgingen dat wat een ander wist (en betrokkene niet) onmogelijk iets kon voorstellen, anders -zo denken zij vaak- zouden zij het zelf immers wel weten.
Deze kennismaking groeide uit tot een hechte vriendschap. Oene werd voor mij allengs van een geduchte rector tot een vaderlijke vriend, naar wie het -op grond van zijn wijze oordeel in velerlei zaken- goed luisteren was.
Een van de hoogtepunten daarbij wordt gevormd door de woorden die hij schreef bij mijn 25-jarige ambtsjubileum: *Ik stel vast dat tussen ons een vertrouwelijke vriendschap is gegroeid, die mij zeer dierbaar is.*
U begrijpt dat deze woorden ook mij zeer dierbaar zijn.

Wanneer ik de indruk die hij op mij maakte, kort moet samenvatten, dan zou ik met weinig woorden kunnen volstaan: erudiet, begiftigd met een uitzonderlijke werkkracht, wijs en eenvoudig.

Allereerst zijn grote eruditie en belezenheid. Naast zijn uitgebreide kennis en grote vaardigheid op het gebied van de exacte vakken had Oene ook grote affiniteit met wat hij (liever dan geesteswetenschap) cultuurwetenschap noemde. Huizinga was één van zijn geliefde schrijvers, maar ook in de Engelse, Franse en Duitse literatuur voelde hij zich thuis. Eigenlijk zei en schreef hij liever in zijn uitmuntende, ietwat archaïsche, stijl *te huis*. De literatuur uit de klassieke oudheid was hem via vertalingen bekend geworden, maar hij mocht graag weten wat er ‘eigenlijk’ stond. Terugdenkend aan onze vele gesprekken, vermoed ik dat bij dit alles een voorname rol gespeeld is door zijn wiskundeleraar aan de Groningse H.B.S.,



dr. Obe Postma, doctor in de wis- en natuurkunde, maar ook schrijver van Friese bodem, in 1947 als eerste begiftigd met de Gysbert Japicx-prijs.
Naar ik vaak vermoed heb, was Oene eigenlijk wel een beetje trots (voor zover dit in zijn aard lag) op zijn stilistische vermogens. Hij schreef een karakteristiek, zoals ik al opmerkte, enigszins archaïsch, Nederlands. Een klein detail: het is mij opgevallen dat hij vaak het lidwoord wegliet om het betrokken substantivum meer reliëf te geven. Leest u zijn geschriften er maar eens op na.
Velen hebben ook genoten van zijn op voortreffelijke wijze gebrachte colleges en voordrachten, deze laatste ook geheel uit het hoofd voorgedragen, zonder gebruik te maken van de gedrukte tekst. Zelf vertelde hij mij eens hoe hij vele avonden besteedde aan het memoriseren van bijvoorbeeld zijn rectorale oratie bij de opening van het academische jaar.
Bij zijn afscheid in 1971 werd hem een boek aangeboden, *Steen en Schelp*, een selectie van 20 artikelen, gekozen uit zijn vele literaire artikelen en voordrachten. Een literatuurlijst van circa 300 artikelen en boeken van zijn hand besluit deze bloemlezing. Hierbij zijn niet opgenomen de vele boekbesprekingen, wiskundige opgaven en dagblad-artikelen. Naar ik meen heeft hij in totaal meer dan 400 publicaties op zijn naam staan, waaronder tien boeken.
Onder al deze artikelen en boeken zijn er ook die niet ‘high brow’ zijn, maar amusant en boeiend, vaak de speelse kant van de wiskunde belichtend, graag ook gelezen door niet-specialisten. Met name noem ik de vele *Verscheidenheden* in *Euclides*, waarvan een vijftigtal in 1977 nog in een bundel is samengebracht [2].

Het bovenstaande adstrueert al mijn opmerking over zijn uitzonderlijke werkkracht, maar insiders weten dat daarbij meer aan de hand was, en daardoor krijgen deze aspecten van zijn leven een extra dimensie: al deze zaken, zijn taken als hoogleraar en als rector, zijn behoefte aan studeren en publiceren, en zijn vele maatschappelijke functies wist hij op wonderbaarlijke manier te combineren met een steeds zwaarder wordende zorg voor zijn Vrouw en deze combinatie was zo voortreffelijk geconstrueerd dat niemand en niets aan aandacht te kort kwam.

Een beeld van Bottema zou niet compleet zijn zonder aandacht voor zijn bestuurlijke en organisatorische activiteiten; ook deze lagen hem na aan het hart en hij vervulde ze met grote toewijding. Hierbij straalde hij gezag uit, een gezag dat -en zo behoort het, anders stort dit snel ineen- gebaseerd was op zijn wijsheid en redelijkheid van argumenten.
Eenmaal leraar, was hij snel directeur; eenmaal hoogleraar, was hij snel voorzitter van de Afdeling Algemene Wetenschappen, secretaris van de Senaat en daarna ruim acht jaren Rector Magnificus.
Ten tijde van zijn intreerede in 1941 heerste er blijkbaar rust aan het onderwijsfront. Daarin zegt hij

...
Deze tekst wordt op ditzelfde ogenblik
hard op gezegd in een frans landschap met
als enige toehoorders het struweel en wat
stoeiende vogels, die er niets van begrijpen
maar heel wel schijnen te beseffen dat de
eenzame spreker er dankbaar voor is dat
hij doen mag wat hij doet. ...

...
Van de vogels hier is inmiddels de onzekerheid
en de nieuwsgierigheid overgegaan in onver-
schilligheid. Ik verlaat deze plek met een
simpele groet aan jullie beiden en aan de kinderen.
Ik ben verweg en toch dichtbij.

Uit de toespraak, opgesteld door Prof. Dr. O. Bottema en gelezen door Prof. Dr. D. de Vroedt, ter gelegenheid van het 25-jarig TH-jubileum van de auteur op 2 oktober 1981.

namelijk niet te zullen spreken over *onderwijskundige problemen ... voor zover hun existentie reëel is.*
Hoe anders was de situatie bij zijn afscheid in juni 1971. Hij had nog recht op een vol academisch jaar, maar gaf er de voorkeur aan terug te treden nu de Wet op de Universtaire Bestuurshervorming in aantocht was. Hij vergeleek deze stand van zaken aan de TU (met toen nog vijfjarig curriculum) met een toneelstuk in vijf bedrijven, waarbij hij na een rommelig en vormloos eerste bedrijf toch de schouwburg zou moeten verlaten. Zijn reactie is: gaan jullie maar, ik hoor het later wel.
Tussen deze twee momenten van intrede en uittrede liggen dertig jaren waarin hij een belangrijke rol speelde bij de vormgeving van het onderwijs op velerlei niveau. Zo heeft hij in 1947 in Delft een nieuwe vorm van onderwijs geïntroduceerd, de instructie, waarbij een deel van de onderwijstaak van de hoogleraren werd overgeheveld naar de medewerkers, hetgeen een aanzienlijke uitbreiding van de staf met zich meebracht.
Men kan niet anders zeggen dan dat zijn invloed als een krachtige golfslag ging door onze faculteit en door de TU in het algemeen.
Toch moeten we het de door hem zo bewonderde dichter J.H.Leopold nazeggen: *De zee is eeuwig, maar de golfslag niet*, en heeft ook hij moeten meemaken dat de tijd veel van zijn innovaties weer verving door nieuwere ideeën, waarin hij toch tot op zekere hoogte wist te berusten.
U begrijpt dat ik juist met betrekking tot deze bestuurlijke zaken denk aan zijn wijsheid en menselijk inzicht.
Bij hem ging het echter niet alleen om besturen in het groot; ook de mensen als persoon die op zijn weg kwamen schonk hij aandacht. Hij was daarbij altijd zeer duidelijk in zijn oordeel, dat daardoor wel eens hard kon overkomen.
Hij stelde strenge eisen aan anderen, zoals hij deze in de eerste plaats aan zichzelf stelde, maar hij gaf ook kansen en schonk vertrouwen.
Ook in kleine kring heb ik hem als bestuurder meegemaakt, in het bestuur van een studiefonds, dat circa zesmaal per jaar vergadert en dan bescheiden bedragen verdeelt. Ook in deze kring werd zijn wijze oordeel gewaardeerd en dit telde zwaar mee. Van deze bijeenkomsten genoot hij zeer en hij bewonderde vooral de penningmeester, lid van de Raad van Bestuur van een grote bank, in hoge mate. In de eerste plaats omdat deze meester was op een gebied dat niet het dagelijkse terrein van Bottema was, maar vooral omdat deze zich niet alleen interesseerde voor de grote kapitalen van zijn bank, maar ook zorgvuldig de bescheiden middelen van onze Stichting beheerde.

Hiermee komt de eenvoud van Bottema ten tonele. Oene is altijd eenvoudig gebleven. Zijn gehele stijl van leven wees daarop. Hem zijn zeven hoge onderscheidingen uit binnen- en buitenland ten deel gevallen, maar hij wist dit steeds te relativeren. Zijn

overlijdensbericht was dan ook zeer sober en vermeldde slechts *Oene Bottema*. Jaren daarvoor zei hij mij eens in een persoonlijk gesprek: ‘voor het aangezicht van de dood past geen ijdelheid.’
Ook hield hij altijd de goede vormen in acht. Men zou hem niet gauw, en zeker niet uit eigen beweging, tutoyeren, en als hij na langdurig wederzijds vertrouwen de toestemming daartoe gaf, had menigeen daar nog moeite mee. Maar -zo vertelde hij mij eens- hij bleef ook zijn eigen promotor, de vermaarde Leidse hoogleraar in de meetkunde prof. dr. W. van der Woude, tot op zeer hoge leeftijd met U aanspreken, terwijl Van der Woude Oene zelf hardnekkig ‘jonge man’ bleef noemen.

Ook na de periode gemarkeerd door zijn aantreden als jong leraar en zijn afscheidsrede als hoogleraar van grote faam, bleef Oene studeren en publiceren.
In 1979, hij was toen 78, verscheen bij de Noord-hollandse Uitgeversmaatschappij het lijvige boekwerk *Theoretical Kinematics*, dat hij in samenwerking met de Amerikaanse kinematicus B. Roth had geschreven. Enkele jaren daarna verscheen daarvan een paperback uitgave in de Doverserie. Hierop was Oene echt trots. Daarna bleef een stroom van artikelen, opgaven en boekbesprekingen uit zijn pen vloeien en deze werden in zijn karakteristieke, kloeke handschrift bij de drukker bezorgd.
Bij dit alles bleef zijn zorg voor zijn Vrouw onverminderd en eiste zelfs steeds meer aandacht. Haar dood in 1981 was voor hem een fundamentele schok, maar door zijn sterke persoonlijkheid wist hij zich staande te houden, mede door intensievere contacten met enkele vrienden, waaronder zijn mederotarians een voorname plaats innamen. Vooral toen hij minder mobiel werd, waren de Rotarybijeenkomsten voor hem hoogtepunten in de week, waarnaar hij, zoals hij zei, telkens weer uitzag.
Tot zijn zevenentachtigste jaar bleef hij wetenschap-pelijk actief. Daarna werd zijn geest gehuld in een nevel die zich allengs verdichtte. Het einde kwam in 1992, kort voor zijn 91ste verjaardag. Met hem ging een groot man heen.

Tot slot dit. In de jaren tachtig koos Bottema zich een Ex Libris: de rechte van Euler. Nu was Euler een wiskundige met wie Oene grote affiniteit had, hun wijze van wiskundebeoefening vertoont verwantschap. Zoals bekend, gaat de rechte van Euler door drie voorgeschreven punten behorende bij een driehoek: het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van de omgeschreven cirkel, en dat is iets bijzonders.

Zo was ook Oene Bottema: rechtlijnig en bijzonder.

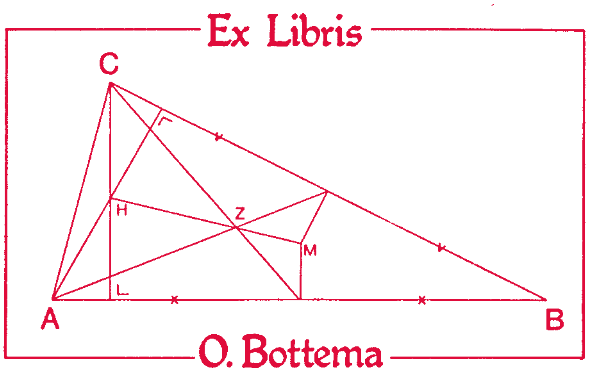
Den Haag, 1 november 2001

Noten

[1] Mechanism and Machine Theory, vol. 21, nr. 6, Special Issue. Dedication to Oene Bottema on the Occasion of his 85th Birthday, Pergamon Journals Limited (1986).
[2] Zie onder andere de bijdrage van Bert Zwaneveld op pagina 112 van dit blad.

Over de auteur

Prof. dr. A.W. Grootendorst (geboren 1924) studeerde aan de Leidse Universiteit, aanvankelijk Oude Talen, maar na een jaar stapte hij over op de wiskunde, echter zonder de Klassieke Letteren uit het oog te verliezen. In 1959 promoveerde hij bij Prof. dr. H.D. Kloosterman op een proefschrift getiteld Thetareeksen in verband met relatief-kwadratische getallenlichamen. Na een periode van vier jaren als leraar aan het Gymnasium Haganum was hij tot zijn emeritaat in 1989 verbonden aan de TH/TU in Delft, achtereenvolgens als weten-schappelijk hoofdmedewerker, lector en hoogleraar.
Adresgegevens: Aardbeistraat 11, 2564 TM Den Haag, tel.: 070 3232936, e-mail: awgrootendorst@hetnet.nl



HERINNERINGEN AAN BOTTEMA

[H.J.A. Duparc]

Reeds voor zijn benoeming tot hoogleraar aan de toenmalige Technische Hogeschool Delft was Bottema bekend als docent en wiskundige. Van zijn grote liefde voor de meetkunde getuigden toen (en later) zeer vele kleine en een aantal grotere publicaties. Zijn charmante boek 'Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde' kende een eerste uitgave in 1944; een nieuwe uitgave van dit zelfde boek verscheen nog in 1987 [1], dus op zeer hoge leeftijd van Bottema.
Na zijn benoeming in 1941 tot hoogleraar in de zuivere en toepaste wiskunde en de mechanica, bepaald niet op het gelukkigste moment in de vaderlandse geschiedenis, speelde hij al snel een belangrijke rol. De twee- en driedimensionale meetkunde waren niet genoeg voor hem, hij nam er een dimensie bij, de tijd – zeer nuttig voor het meer technische milieu waarin hij toen terecht was gekomen. Hij was een der weinigen van de toenmalige onderafdeling der wiskunde die de taakopdracht mechanica waar maakte. Zijn colleges, met name voor de opleidingen in de werktuig- en scheepsbouwkunde, waren befaamd. Ademloos luisterden de studenten naar zijn glashelder betoog, zó begrijpelijk voor hen, dat het maken van aantekeningen er bij in schoot. Des avonds thuis zaten zij met de gebakken peren: 'Wat had hij ook al weer verteld?' Minder dankbaar waren zij voor een strikte discipline, niet bepaald het kenmerk van alle socialisten, waarmee de socialist Bottema hun gangen probeerde te reguleren. Wie te laat op college of bij een examenzitting verscheen, werd genadeloos teruggestuurd, ook al kon dat funeste gevolgen hebben voor het verder studiebeloop van betrokkene.

Zijn onderwijs en onderzoek in de dynamica, ingegeven, zoals hierboven aangeduid, door de meetkunde, kan men zien als de aanzet tot de robotica, van belang voor onder meer de ontwikkeling van medische technieken. Voorts was Bottema onder de toenmalige wiskundigen een der weinigen die achter Timmans initiatieven stond om te komen tot een opleiding voor wiskundig ingenieur.

Als snel viel het oog op hem ter vervulling van bestuurlijke taken aan de TH. Gedurende de jaren vijftig was hij bijna negen jaar lang rector magnificus. Het was een taak die hij met grote toewijding vervulde, al bleef hij ook toen de wetenschap trouw. Hij poogde daarvoor donderdagochtend vrij te houden, maar hij vertelde mij eens mistroostig dat hem dat in het gehele najaarsseizoen maar twee keer gelukt was.

Aan Bottema dankt de TH een lesroosterindeling van vier uren in de ochtend (half negen tot half een), nuttig voor twee blokken van twee college-uren; dit in tegenstelling tot de traditionele indeling met drie uren (van negen tot twaalf).

Befaamd waren zijn redes zoals hij die bij de jaar-opening hield. Bekend is dat hij daarvoor niet over één nacht ijs ging, maar dat hij eindeloos bezig was om ze te verfraaien met slimme taalkundige en andere vondsten. Zo herinner ik mij dat hij het jaarlijkse gebeuren op de TH eens vergeleek met een schaakspel. De verdere uitwerking van dat idee leidde er toe, dat hij de afwijzing van een student bij een examen met



‘remise’ typeerde, om, zoals hij het verder noemde, vast te stellen dat het leidde tot een lettergrepenpermutatie voor betrokkene. Was het de schoolmeester in hem om met wellust vast te stellen, dat niet alle hoogleraren tegelijk in de lach schoten?
Ook bij de opening van de TH in 1957 hield hij een opvallende rede, al moet ik bekennen, dat het mij net als de studenten bij zijn colleges verging: de inhoud herinner ik mij niet meer.

Ook buiten de TH werd vaak een beroep op hem gedaan. Hij was het die de tafelrede hield in 1954 bij het slotdiner van het Internationaal Congres van Wiskundigen te Amsterdam. Een verzoek het voorzitterschap te bekleden van de Academische Raad wees hij af. Wel vervulde hij daar op de achtergrond enkele taken. Zo werd in de wandelgangen wel beweerd dat een nogal rigide voorstel van voorzitter Maris van de Raad tot herstructurering van het wetenschappelijk onderwijs voor een goed deel door hem was ingegeven. Maar bij de discussie daarover in onze onderafdeling kon je van de diplomaat Bottema niet merken, dat hij er meer mee te maken had. Voor hem was het later een grote teleurstelling toen dat rapport van tafel werd geveegd om plaats te maken voor verregaande democratische hervormingen die Veringa’s wet over de academische bestuursstructuur bood. Zelfs overtuigde socialisten kon de democratie te ver gaan ... Enigszins getuigde daarvan ook zijn afscheidscollege in 1971, maar het lijkt mij meer tekenend voor Bottema om daarvan de slotzin te releveren: ‘De TH was voor mij een boek, een mooi boek. Ik heb het uit’.

Over de auteur

Prof. Dr. H.J.A. Duparc begon zijn loopbaan in 1940 als leraar wiskunde in Batavia. Na de Tweede Wereldoorlog werkte hij op het Mathematisch Centrum (Amsterdam), en vervulde leeropdrachten (ter vervanging van hoogleraren) in Amsterdam, Utrecht en Leiden. Van 1956 tot 1984 was hij hoogleraar wiskunde aan de TH Delft, waar hij jarenlang Bottema als collega had.

Noot van de redactie

[1] In 1997 verscheen Hoofdstukken opnieuw bij Epsilon Uitgaven (Utrecht), gecorrigeerd en opnieuw gezet naar de 2e druk. Aan deze uitgave is een appendix toegevoegd van de hand van J.M. Aarts (ISBN 90 5041 013 8).
In de inleiding tot de ‘noten en aanwijzingen’ waaruit die appendix bestaat, schrijft Aarts: ‘Sinds de tijd dat de eerste druk van dit boekje verscheen is er in het wiskundeonderwijs veel veranderd. De euclidische meetkunde krijgt tegenwoordig veel minder aandacht dan vroeger. Dit zou een reden kunnen zijn waarom de hedendaagse lezer bij de studie van dit boekje op moeilijkheden stuit. De schrijver maakt gebruik van begrippen en resultaten die vroeger gemeengoed waren, maar die tegenwoordig alleen nog maar bekend zijn bij de oudere generatie.
In dit aanhangsel worden enkele aanwijzingen gegeven die de lezer kunnen helpen de tekst beter te begrijpen.’



HERINNERINGEN AAN O. BOTTEMA

[N.G. de Bruijn]



Bijeenkomst 14 juni 1948 in de bibliotheek van de Sub-afdeling Wiskunde van de Technische Hogeschool te Delft, ter gelegenheid van het afscheid van prof. H.J. van Veen.
Zittend v.l.n.r.: Mevr. Bremekamp, Prof. dr. C.H. van Os, Prof. dr. H. Bremekamp, Mevr. Bottema, Mevr. H.J. van Veen, Mevr. van Os, Prof. H.J. van Veen, Prof. dr. S.C. van Veen, Mevr. Rutgers, Mevr. S.C. van Veen, Prof.dr. J.G. Rutgers.
Staand v.l.n.r.: Prof. dr. O. Bottema, Prof. dr. W. Boomstra (docent en studentendekaan), Mevr. Visser, Post (bediende), Prof. dr. C. Visser, Mevr. de Bruijn, Prof. dr. N.G. de Bruijn, Slieker (adm. medew.), Dr. M. van Vlaardingen (instructeur), Eva v.d. Berg (secretaresse), Dr. W.L. van de Vooren (instr.), Bouwhuizen (bed.), Henny Vlugt (secr.), Dr. H.J.E. Beth (docent), Broere (bed.), A. de Bruin (bed.), A. Keern (bed.).
Bottema was de onbetwiste leider.

Inleiding

De naam Bottema kende ik door zijn publicaties, lang voordat ik hem voor het eerst in levende lijve zag, in 1941, toen hij als hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft aantrad. Maar er leven nog wel anderen die hem veel eerder kenden. Mijn oude vriend C.J. Bouwkamp groeide op in Hoogkerk en ging in Groningen op de hbs, waar hij in de hoogste klassen wiskunde leerde van Bottema. En later, toen Bouwkamp student was aan de universiteit in Groningen, was Bottema daar privaat-docent. In beide gevallen was Bouwkamp bijzonder enthousiast over de manier waarop zijn leermeester belangstelling voor het vak wist te wekken.

Van Dantzig

Toen Bottema als hoogleraar in Delft benoemd werd, diende zulks om het gat te vullen dat ontstond toen de racistische Duitse bezetter Van Dantzig ontslagen had. Maar de Delftenaren wilden het niemand aandoen zich het odium van profiteur op de hals te halen door opvolger van Van Dantzig te willen zijn. Gelukkig herinnerden zij zich dat in 1935 na het aftreden van W.A. Versluys diens leerstoel was wegbezuinigd, zodat

Bottema in 1941 kon worden voorgedragen ter vervulling van een vacature-Versluys. Pas kort geleden hoorde ik dat dit niet erg zuiver was geweest, omdat het opheffen van de leerstoel-Versluys in 1938 al was gebruikt als argument om Van Dantzig (die sinds 1932 lector was) buitengewoon hoogleraar te maken.
De wiskundige wereld heeft nooit enig bezwaar geuit tegen het feit dat Bottema deze benoeming in Delft aannam. Integendeel, overal was men ervan overtuigd dat zijn komst voor de ontwikkeling van de wiskunde in Delft een zegen was.
Van Dantzig had de zogenaamde Kleine Cursus verzorgd, de eenjarige beperkte wiskundeopleiding voor bouwkundigen, chemisch technologen, mijnbouwers en ijkers (voorwaar een wonderlijke mengeling). Misschien juist om elke samenhang met de positie van Van Dantzig te vermijden werd Bottema van meet af aan ingezet voor meetkundeonderwijs in de Grote Cursus. Voor de Kleine Cursus werd een tijdelijke oplossing van andere aard gevonden. Bottema had dus niet de leerstoel van Van Dantzig, niet zijn onderwijstaak, en ook niet zijn kamer. Het enige wat hij van Van Dantzig had, was zijn assistent, en dat was ik.

Saaie boel

Toen Bottema in 1941 aantrad vond hij het maar een saaie boel in de sub-afdeling wiskunde, gevestigd in de houten noodgebouwen aan de Jaffalaan. Van zijn collega's ging niet veel uit. Een van de eerste dingen die hij tegen zijn assistent zei was: 'Ik ben 40, Van Os is 50, en de rest is 60.' Die rest bestond uit J.G. Rutgers, H.J. van Veen, H. Bremekamp, J.A. Schouten en F. Schuh. Schouten was een internationaal bekend geleerde, die altijd met zeer begaafde assistenten had gewerkt, zoals Struik, Van Dantzig, Haantjes; in de laatste jaren was het Van der Kulk. Maar in 1941 was Schouten half en half met ziekteverlof; langzamerhand verdween hij van het toneel. Schuh was nog altijd bijzonder actief met het schrijven van leerboeken maar bemoeide zich met niemand.

Bestuurder

Het was goed te begrijpen dat de nieuw aangekomen Bottema weldra alle belangrijke functies kreeg: regelaar van de propedeutische examens, voorzitter van de sub-afdeling wiskunde, beheerder van het gebouwencomplex. Bottema was een geweldig bestuurder. Zijn stijl was wat we tegenwoordig noemen 'no nonsense, zero tolerance'. De assistenten en het bedienend personeel waren bang voor hem. Hij kon de dingen licht spottend zeggen, maar iedereen wist dat hij het meende. Niets ontging hem, en zijn geheugen was fenomenaal.

Van assistent tot collega

Als Bottema's assistent (van 1941 tot 1944) moest ik helpen bij oefeningen voor de studenten, en verder deed ik nogal wat administratie, vooral in verband met Bottema's functie van regelaar van de propedeutische examens. Doordat er geen secretaresse was, heb ik heel wat briefjes moeten typen op kleine velletjes. Maar een belangrijke eenmalige klus was het verzorgen van de tekeningen voor zijn boekje 'Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde', verschenen als deeltje no. 40 in Servire's Encyclopaedie (N.V. Servire, Den Haag 1944), een boekje dat in 1987 een nieuwe, uitgebreide, uitgave kreeg (Epsilon Uitgaven, 1987). Een heerlijk boekje. Die tekeningen maakte ik samen met mijn collega-assistent L. Yntema. Dat ging heel wat gemakkelijker dan het hedendaagse gedoe met tekenprogrammatuur op computers. We deden het gewoon met trekpennen en oostindische inkt. Letters hadden we op gegomd papier, die konden we erbij plakken precies op de plaats waar we ze hebben wilden. En tekenen konden we wel, want we hadden heel wat grote tekeningen voor de Beschrijvende Meetkunde moeten ontwerpen op kolossale, voor echte technici bedoelde, tekentafels.

In 1944 vertrok ik naar Eindhoven om bij Van der Pol op Philips' Natuurkundig Laboratorium te gaan werken, maar twee jaar later haalde Bottema me weer terug als hoogleraar in Delft. Daar was ik nog 6 jaar zijn collega.

Instructeurs

In de naoorlogse jaren, toen ik in Delft Bottema's collega was, voerde hij daar een revolutionaire verandering door: de instelling van de verplichte instructie voor wiskunde.
Tot die tijd waren er naast de colleges alleen de niet-verplichte oefenmiddagen, waarbij assistenten hulp verleenden. De opkomst was in het algemeen slecht. Vaak kwamen studenten trouwens alleen aan het begin van de middag om de opgaven voor zichzelf en hun vriendjes op te halen. En geheel los van de TH waren er repetitoren die groepen studenten, voor zover ze dat konden betalen, africhtten om met minimale kennis door de schriftelijke examens te komen.
Bottema maakte een eind aan deze onwaardige situatie. Hij bereikte dat er een flink aantal wetenschappelijke medewerkers (instructeurs) kon worden aangesteld als leiders van oefenmiddagen die voor de studenten werkelijk verplicht werden gesteld. De aan te stellen instructeurs moesten worden gerekruteerd uit ervaren, liefst gepromoveerde, leraren bij het middelbaar onderwijs.
De belangstelling uit de lerarenwereld was enorm, er waren een stuk of 70 gegadigden. Na een eerste selectie trokken de wiskundige professoren het land rond om op de scholen lessen van de sollicitanten bij te wonen. Binnen een jaar draaide het systeem op volle toeren. Het was een blijvend succes dat overal in het land werd nagevolgd. We moeten Bottema daarvoor bijzonder dankbaar zijn.
Bottema had bij alles veel steun van collega C. Visser die in 1946 de gelederen was komen versterken. Ook Visser was van 'no nonsense, zero tolerance'. Iedereen moet zijn plaats weten.
De foto uit 1948 laat de ploeg zien waarover Bottema de scepter zwaaide (zie pagina 126).

Rectoraat

In 1951 waren roerige tijden aangebroken: studenten protesteerden tegen de strengere examenvoorschriften. De rector Biezeno voelde zich tussentijds gedwongen om af te treden, en Bottema nam met vaardige hand het roer over. Het werd een langdurig rectoraat: hij hield het acht jaar vol. In zijn rectoraatstijd kwamen niet alleen zijn organisatorische gaven tot uiting, maar ook zijn retorische. Al zijn redevoeringen waren stilistische meesterwerkjes.

Persoonlijke verhouding

Mijn verhouding met Bottema was altijd hartelijk, maar nooit amicaal. Daarvoor was (zeker in die tijden) het leeftijdsverschil te groot (ruim 16 jaar). Ik geloof niet dat ik in mijn Delftse tijd ooit bij hem thuis ben geweest.

In 1943 kwam hij op mijn promotie in Amsterdam, waarbij hij vanuit de zaal opponeerde.

Nadat ik in 1952 uit Delft naar Amsterdam vertrok, zag ik Bottema nog maar zelden. Een tijdje bij vergaderingen van de middelbare-akte-examens, na 1960 nog een enkele keer in commissies, in 1967 op een reis van een Nederlandse delegatie van wiskundigen door Hongarije. Maar we hadden weer veel met elkaar te maken bij de organisatie van de eerste Nederlandse Wiskunde-Olympiades. In de loop der jaren hadden we wel heel wat schriftelijk contact. Veel over opgaven en andere publicitaire zaken, maar ook persoonlijke brieven, allemaal in hetzelfde stoere handschrift. Het veranderde nooit: tussen brieven uit 1943 en 1982 is geen verschil in handschrift te merken.

Cabaret

Er was nog een hoogtepunt in 1984, toen ik als hoogleraar in Eindhoven afscheid nam. Bottema was een van de sprekers. De in hem gestelde verwachtingen werden volledig bewaarheid. Hij was een 82-jarige stand-up comedian. De Eindhovense TH-berichten schreven onder de kop ‘Cabaret’:

‘Sommige mensen denken misschien dat afscheids-colleges wat saaie stoffige aangelegenheden zijn. Dat dat zeker niet altijd het geval is, bleek bij het afscheid van prof. De Bruijn op vrijdag 12 oktober. Daar gaf de oud-rector van de TH Delft in zijn toespraak tot De Bruijn een nummertje cabaret weg van de bovenste plank. De hoogbejaarde gaf weer hoe hij zich de promotie van De Bruijn herinnerde. Het was een openbare promotie en Bottema zou een vraag stellen uit het publiek. Omdat hij evenwel niets van het proefschrift begreep (‘Het ligt nog dichtgebonden in mijn kast’, zei hij), had De Bruijn de vraag voor hem opgeschreven. En omdat hij zich niet in de kaart wilde laten kijken, had hij de tekst die De Bruijn hem gegeven had, keurig van buiten geleerd. Er kon dus niets misgaan. Maar wat bleek bij het dankwoord van De Bruijn? Bottema had zijn lesje te goed geleerd en ook het antwoord (dat De Bruijn er volledigheidshalve bij geschreven had) keurig voorgedragen. Een aardige regiefout.’

Moed

Bij dezelfde afscheidsceremonie (12 oktober 1984) had ik in mijn rede verteld wat en wie ik in mijn leven allemaal bewonderd had. Ik citeer daaruit de passage: ‘Ik bewonderde O. Bottema, en nu wil ik het niet hebben over wat ik van hem leerde aan zeer onderhoudende meetkunde, en ook niet over zijn buitengewone gaven als redenaar, maar omdat hij de moed had om in een openbare rede in de bezettingstijd bijzonder prijzende woorden te uiten over Van Dantzig, die door de bezetter ontslagen was.’

Het zeggen en schrijven van zulke dingen was toen allerminst zonder gevaar. Het tekent de kracht van Bottema’s karakter.

Over de auteur

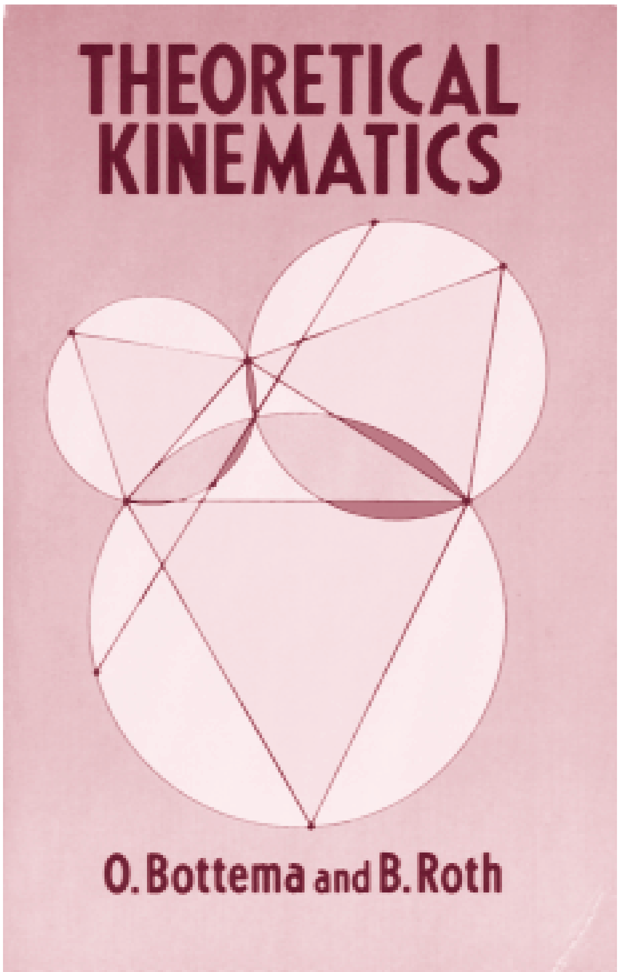
Prof. dr. N.G. de Bruijn (e-mailadres: n.g.d.bruijn@tue.nl), geboren 1918 te Den Haag, was hoogleraar wiskunde te Delft (1946-1952), aan de Universiteit van Amsterdam (1952-1960) en in Eindhoven (1960-1984) en sinds 1984 emeritus.



HERINNERINGEN AAN MIJN VRIEND PROF. DR. O. BOTTEMA

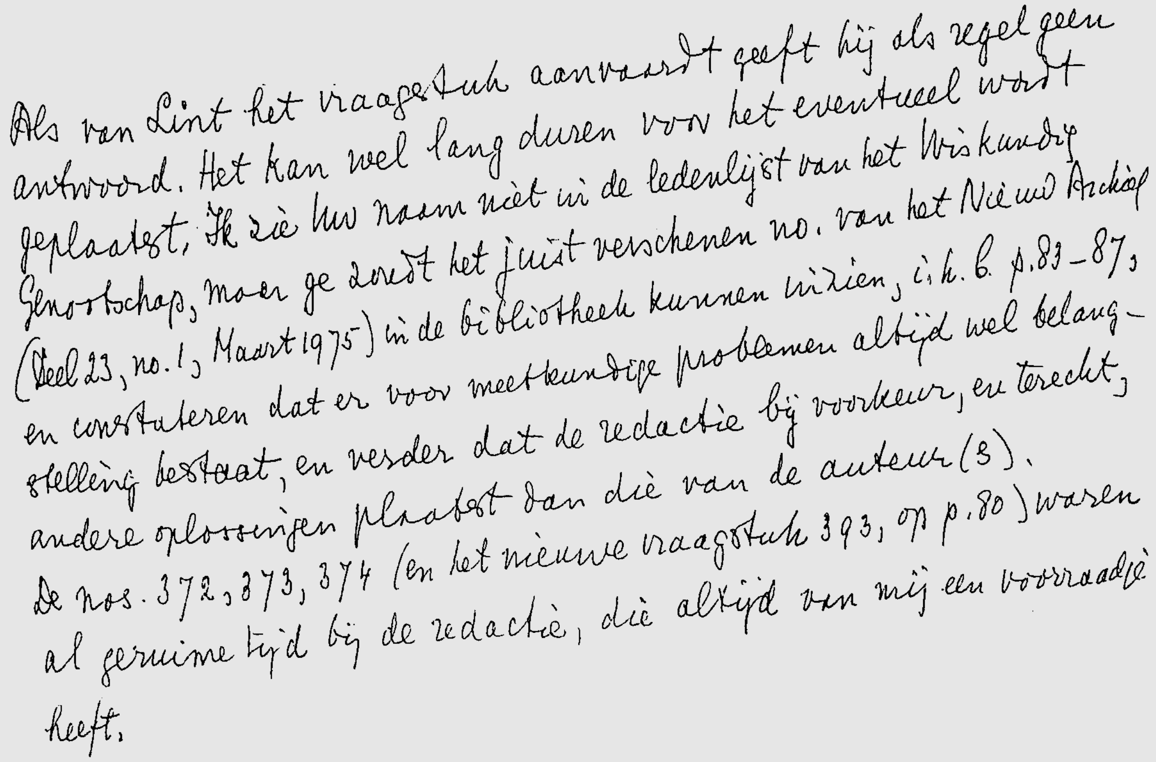
[Harrie Stal]

Het is met enige schroom dat ik gevolg geef aan het verzoek van Prof. Dr. N.G. (Dick) de Bruijn om mijn herinneringen aan Prof. Bottema in Euclides te publiceren.
Indertijd heb ik het genoegen gehad met Bottema samen te werken op het gebied van Kinematica en Leer der Mechanismen. Dit begon in 1960 toen ik het ambt van Hoogleraar in de Werktuigbouwkunde aanvaardde met een oratie 'Mechanisatie en Maatschappij'. Dat geschiedde nog in de kapel van het voormalig Agnietenklooster aan de Oude Delft. De spreker moest een echte kansel bestijgen en werd door de pedel, de heer Zijp, gewezen op de spijker waaraan de baret moest worden opgehangen. De toga-kamer was in de kelder van de kapel. Toen ik mij daarheen begaf om mij te verkleden, werd ik in de deuropening tegengehouden door een indrukwekkende gestalte die mij vroeg: 'Ben jij Stal, dan moeten wij samen eens wat gaan doen.' U begrijpt het al, dat was Bottema, wiens grote reputatie hem al vooruit was gegaan. Die reputatie was ook mij bekend uit gesprekken met Philips-collega's die de helderheid van zijn colleges bezongen. Die helderheid maakte het vak schijnbaar eenvoudig. Pas bij het examen bemerkte men hoe moeilijk het in feite was.
Bottema stelde mij voor samen een college op te zetten waarin hij de theoretische mechanica zou behandelen en ik de leer der mechanismen en machines. Ik kan niet ontkennen dat ik vereerd was door dit verzoek. Later hebben we het idee verder uitgewerkt, en zo gaven we beurtelings een college op maandagochtend. Hij was blij te constateren dat je met die kinematica iets nuttigs kon doen.
De samenwerking ontwikkelde zich voorspoedig.
We bezochten in Duitsland enige 'Getriebe Tagungen' en kregen daardoor contact met enkele gerenommeerde Duitse beoefenaars van het vak dat in Duitsland op hoge 'Achtung' mocht rekenen. Ik werd door opmerkingen tijdens die Colloquia in de Programma-commissie uitgenodigd en heb zodoende het Congres in Goslar helpen voorbereiden waaraan wij beiden als spreker deelnamen.
In Goslar werd Bottema door de dagvoorzitter aangekondigd als 'de grote Bottema'. Hij opende zijn voordracht met de woorden: 'Hier zien jullie dan een zeer beroemde man.'
Bottema nam zo vaak als mogelijk was zijn gehandicapte echtgenote Femmy mee, ook naar een congres in Heidelberg. We reden daar met onze auto gevieren plus rolstoel en bagage naar toe. Mijn vrouw begeleidde Femmy tijdens het Damesprogramma en duwde de rolstoel over de hobbelige straatjes van Heidelberg. Het echtpaar Bottema was wars van overbodige luxe. Met de achterkant van een kalender-blad kon hij zich uren amuseren.
Met een Amerikaanse collega, Bernie Roth van Caltech, schreef hij samen een handboek over Kinematica. Ik heb grote bewondering voor die samenwerking gehad, gezien de enorme geografische afstand. Bottema zou destijds veel gehad hebben aan e-mail ....
Tijdens mondelinge examens die we samen afnamen, bleek hoe goed de stof was overgekomen. Hij rookte dan rustig een pijp en was aldus een vaderlijke figuur voor de studenten.
Bij onze laatste ontmoeting, ten huize van zijn zoon Rinze in Son, ging het al niet zo goed meer met zijn gezondheid. We hebben toen echter nog veel herinneringen opgehaald.
En zo houd ik hem in gedachten: Als een groot en wijs geleerde en een zeer bijzondere vriend.



Over de auteur

Prof. Ir. H.P. Stal, geboren in 1920, behaalde aanvankelijk een MTS-diploma en startte in 1940 zijn carrière als werktuigkundig machineconstructeur bij Philips. Gestimuleerd door zijn chef en met ondersteuning van Philips ging hij op latere leeftijd naar de TH Delft, alwaar hij in 1955 afstudeerde. Van 1960 tot 1971 was Stal hoogleraar te Delft, waarna hij toetrad tot de directie van Philips. Hij is de oprichter van het TNO-instituut ITP te Eindhoven. Van 1980 tot zijn pensionering in 1985 bekleedde hij een deeltijdhoogleraarschap te Eindhoven.


Als van Lint het vraagstuk aanvaardt geeft hij als regel geen
antwoord. Het kan wel lang duren voor het eventueel wordt
geplaatst. Ik zie uw naam niet in de ledenlijst van het Wiskundig
Genootschap, maar ge zoudt het juist verschenen no. van het Nieuw Archief
(Deel 23, no. 1, Maart 1975) in de bibliotheek kunnen inzien, i.h.b. p. 83–87,
en constateren dat er voor meetkundige problemen altijd wel belang-
stelling bestaat, en verder dat de redactie bij voorkeur, en terecht,
andere oplossingen plaatst dan die van de auteur(s).
De nos. 372, 373, 374 (en het nieuwe vraagstuk 393, op p. 80) waren
al geruime tijd bij de redactie, die altijd van mij een voorraadje
heeft.

FIGUUR 1 Het handschrift van Bottema, uit een brief aan de auteur d.d. 24 april 1975

BOTTEMA EN VELDKAMP

Bij de honderdste geboortedag van O. Bottema

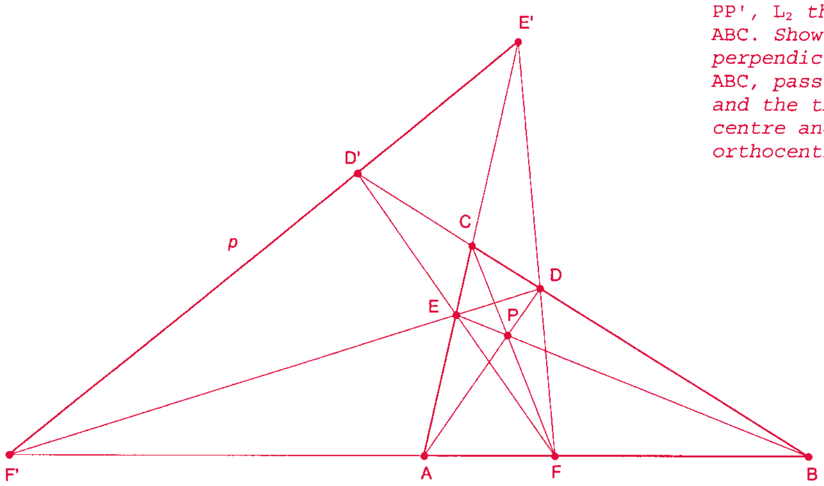
[M.C. van Hoorn]

Bottema

Oene Bottema werd geboren te Groningen op Eerste Kerstdag 1901. Zijn vader had een functie bij de spoorwegen en was nadien onder meer stationschef op enkele dorpsstations in het noorden des lands. Oene Bottema bezocht de Rijks HBS te Groningen en studeerde daarna aan de Rijksuniversiteit aldaar.
Een enkel woord over deze keuzes. Het lag destijds niet voor de hand dat iemand met een komaf als Bottema naar de hbs ging. Standsverschillen speelden nog een aanzienlijke rol. Bottema ging naar de hbs, naar eigen zeggen omdat zijn ouders dat wilden.
De hbs was bij haar fundering in 1863 niet bedoeld als vooropleiding voor een universitaire studie. Daar was het gymnasium voor. De hbs bleek echter al gauw voor exact aangelegde jongelieden een goede keuze. Zij konden met een hbs-diploma naar de Polytechnische School te Delft, of via een staatsexamen gymnasium toch naar de universiteit. Pas in 1917 zorgde de wet-Limburg ervoor dat men van de hbs rechtstreeks naar de universiteit kon, namelijk als men wis- en natuurkunde, dan wel geneeskunde wilde studeren. De andere faculteiten bleven gesloten voor hbs'ers. Voor meer uitleg over de betekenis van de hbs moge kortheidshalve worden verwezen naar enige literatuur hieromtrent ([1] en [2], hoofdstukken 1 en 2).
Bottema kwam in 1919 van de hbs en kon toen dus naar de universiteit. Hij ging in Groningen wiskunde studeren. Hij voltooide deze studie in 1924 en werd leraar aan de gemeentelijke hbs te Hengelo.
Tijdens zijn leraarschap te Hengelo kwam Bottema in contact met professor Van der Woude uit Leiden, die als gecommitteerde optrad aan zijn school. Willem van der Woude (1876-1974), afkomstig uit het Friese Oosternijkerk, was een meetkundige van grote reputatie. In 1922 was Dirk Struik bij hem gepromoveerd. Na het overlijden van Van der Woude schreef Bottema een tweetal herdenkingsartikelen [3 en 4].
Bottema promoveerde in 1927 bij Van der Woude op het proefschrift *De figuur van vier kruisende rechte lijnen*. Hij bleef vooralsnog werkzaam in het middelbaar onderwijs; van Hengelo ging hij naar Groningen, en in 1933 werd hij directeur van de Rijks HBS te Sappemeer; vervolgens werd hij in 1935 directeur van de Rijks HBS te Deventer. In die tijd waren de scholen veel kleiner dan nu en elke directeur gaf ook zelf les, en bleef aldus leraar. Van 1937 tot 1941 was Bottema penningmeester van de vereniging van wiskundeleraren Wimecos.
De wetenschap trok hem. In de jaren '30 was Bottema privaat-docent, eerst in Groningen en later in Leiden. In 1941 werd hij benoemd tot hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft, de opvolger van de Polytechnische School, nu de Technische Universiteit Delft. Het jaartal 1941 roept misschien vragen op, maar Bottema was van onbesproken gedrag. Van 1951 tot 1959, ongebruikelijk lang, was Bottema rector-magnificus van de Technische Hogeschool. Vanwege zijn grote verdiensten ontving hij de eremedaille in goud van de stad Delft. Ook werd hij Ridder in de Orde van de Nederlandse Leeuw en Commandeur in de Orde van Oranje-Nassau.
Bottema ging met emeritaat in 1971. Hij bleef actief als schrijver van boeken en artikelen. Het *Nieuw Archief voor Wiskunde* wijdde in 1987 een gehele aflevering aan hem, bij zijn 60-jarig doctoraat. Bij een levensschets, geschreven door G.R. Veldkamp, is een bibliografie opgenomen waarin 447 artikelen voorkomen [5].
Bottema stond bekend om zijn heldere en bondige stijl. Hij kwam tot nieuwe resultaten en vaak leverde hij van een bekende stelling een nieuw, korter bewijs dan tot dan bekend. Bekend is een aantal boeken van zijn hand over meetkundige onderwerpen [6, ..., 10].
Niet in bovengenoemde bibliografie opgenomen werden de vraagstukken die Bottema had ingezonden naar het *Nieuw Archief*. Het gaat om honderden vraagstukken. Hierna volgt een voorbeeld van zo'n vraagstuk.
Waarom zou er in een tijdschrift voor het voortgezet onderwijs zoveel aandacht aan Bottema gegeven moeten worden? Heeft hij voor het middelbaar onderwijs een bijzondere betekenis gehad? Toch wel. Met didactische discussies heeft hij zich, voor zover bekend, nimmer ingelaten. Wel schreef hij in *Euclides* honderd 'Verscheidenheden', meetkundige artikelen, sommige met een literaire inslag. In 1977 werden vijftig hiervan door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren gebundeld [11]. Bottema schreef eveneens ettelijke meetkundige artikelen in het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*, het blad voor de aktenopleidingen. Hij was sinds 1945 'medewerker' van de redactie van het *Nieuw Tijdschrift*, wat hij bleef tot aan het einde van dit tijdschrift in 1988.
Maar hij deed meer. Gedurende het gehele bestaan van de hbs waren bij het eindexamen gecommitteerden actief, meestal gepromoveerde vakdeskundigen, die het gemaakte schriftelijk werk mede beoordeelden en samen met de examinator de mondelinge examens afnamen. Op deze manier was Bottema, toen hij nog leraar was, in contact gekomen met Van der Woude. Een kleinere groep deskundigen zorgde, in beslotenheid, voor de examenopgaven. Het is dit laatste waarbij Bottema betrokken was, mogelijk al vanaf de jaren '40. Nergens wordt over deze activiteit geschreven. Toen ik hem in 1975 bezocht, vertelde hij terloops dat hij wel examenopgaven had opgesteld. Ik had er misschien over moeten doorvragen, al was Bottema niet iemand die meer losliet dan hij van plan was. Destijds was weinig bekend over de manier waarop de examenopgaven tot stand kwamen. De opgaven waren er en wie ze opgesteld had deed niet ter zake. Bottema was geknipt voor dit werk en heeft aldus zeker zijn invloed uitgeoefend op het middelbaar onderwijs.
Bottema overleed op 30 november 1992 te Delft.
Figuur 1 geeft een proeve van het handschrift van Bottema.

Veldkamp

Geert Remmert Veldkamp werd geboren op 7 september 1907 te Uithuizermeeden in Noord-Groningen. Zijn vader was ambtenaar. Na de lagere school bezocht hij de mulo, en daarna stapte hij over



436. *Let P be a point in the plane of a given triangle ABC, P' the isogonally conjugated point of P with respect to ABC, L_1 the line PP', L_2 the trilinear polar (or harmonical) of P with respect to ABC. Show that the locus of the points P such that L_1 en L_2 are perpendicular is a quintic curve, with nodes at the vertices of ABC, passing through the isotropic points, through the incentre and the three excentres, through the centroid, through the orthocentre and through the vertices of the pedal triangle of the orthocentre.*

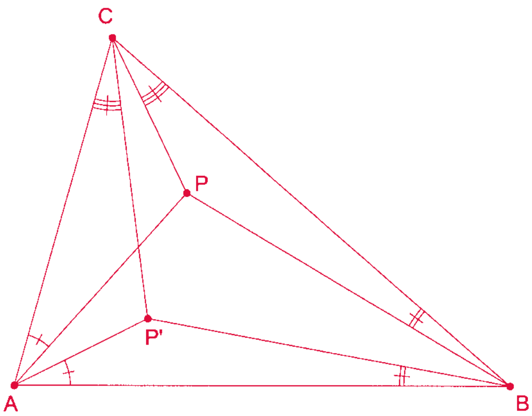
(O. BOTTEMA & M.C. VAN HOORN)

FIGUUR 2 De harmonicaal van een punt ten opzichte van een driehoek

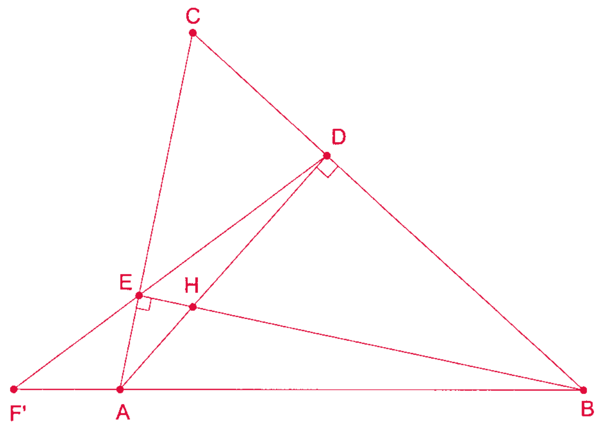
FIGUUR 3 Problem 436

naar de Rijkskweekschool voor onderwijzers te Groningen. Hij behaalde tegelijk met zijn bevoegdheid als onderwijzer, in 1926, zijn lagere akte wiskunde, een unieke gang van zaken, want men moest bevoegd onderwijzer zijn om te kunnen worden toegelaten tot de examens voor een lagere akte. Op 19-jarige leeftijd mocht hij dus al wiskunde geven op de mulo.
Veldkamp behaalde vervolgens de akten K1 en K5, en tevens legde hij het staatsexamen hbs-B af, waardoor hij aan een universiteit kon inschrijven. In 1935 legde hij het doctoraal examen af aan de Rijksuniversiteit te Groningen.
Een enkel woord over de opleidingen die Veldkamp volgde. De kweekschool diende geregeld als opstap voor 'jongelieden van eenvoudige komaf'; zulke jongelieden waren dan vanaf de lagere school naar de mulo gegaan, en daarna, bij gebleken aanleg, naar de kweekschool. In zijn afscheidscollege *Onderwijs in beweging*, op 4 november 1977, vertelt Veldkamp nog over de toelatingsexamens van de vooroorlogse kweekscholen.
Veldkamp behaalde dus ook het staatsexamen hbs-B. Sinds 1923 was de hbs gesplitst in een A-afdeling en een B-afdeling. Voor die tijd sprak men alleen van 'de hbs'. Dit was wat in 1923 de B-afdeling werd; de A-afdeling was iets nieuws.
Veldkamp voltooide meerdere opleidingen, terwijl hij daarnaast als leraar werkzaam was, want er moest natuurlijk brood op de plank komen. Hij werkte in het nijverheidsonderwijs, laatstelijk (tot 1948) aan de middelbare technische school te Groningen, de school die later hts zou heten. Hij had zijn werk door oorlogsomstandigheden moeten onderbreken, eerst doordat hij in 1939-1940 gemobiliseerd werd, en later doordat hij van mei 1943 tot april 1945 ondergedoken was. In 1943 moesten alle Nederlandse militairen zich melden om in krijgsgevangenschap te gaan; velen van hen doken toen onder.

In 1948 werd Veldkamp wetenschappelijk hoofdambtenaar aan de Technische Hogeschool te Delft. Men kan erover speculeren hoe deze overstap tot stand kwam. Ik houd het erop dat hij was ontdekt door Bottema. Zij hadden elkaar leren kennen via het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*. Bottema en Veldkamp waren beiden medewerker van de redactie.
Ook in 1948 werd Veldkamp één van de twee redacteuren van het *Nieuw Tijdschrift*. In die hoedanigheid publiceerde hij jarenlang uitwerkingen van alle schriftelijke examens K1 en K5, respectievelijk wiskunde mo-A en mo-B. Enige malen gaf hij ongezouten kritiek op de opgaven zelf, die, naar hij duidelijk maakte, soms niet deugden [12]. Op zulke kritiek werd nimmer gereageerd, de examenopstellers bleven anoniem.
In het *Nieuw Tijdschrift* publiceerde hij ook informatieve artikelenseries, onder meer over groepentheorie. Zo gaf hij op afstand college aan degenen die zich voorbereidden op een akte-examen.
Daarnaast schreef hij in het *Nieuw Tijdschrift* talloze bijdragen van hoofdzakelijk meetkundige aard.
Veldkamp was een grootmeester die weinig in de schijnwerpers trad. Vele bijzondere eigenschappen van driehoeken werden door hem ontdekt, of herontdekt en van een nieuw en meestal 'zuiver' meetkundig bewijs voorzien. Een virtuoos voorbeeld hiervan is het bewijs van zijn (her)ontdekking dat de isodynamische as van een driehoek, behalve door het middelpunt van de omgeschreven cirkel en door het punt van Lemoine, door het hoogtepunt van de voetpuntsdriehoek gaat [13]. Nadere uitleg hierover moet thans achterwege blijven.
In 1962 werd Veldkamp lector aan de Technische Hogeschool te Delft. Een lector was net als een hoogleraar een kroondocent, dat wil zeggen benoemd door de Kroon. In 1963 promoveerde Veldkamp met lof bij Bottema op het proefschrift *Curvature theory in*



FIGUUR 4 **Isogonale verwantschap**



FIGUUR 5 $F'A \times F'B = F'E \times F'D$

plane kinematics. Nog in datzelfde jaar werd hij benoemd tot hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Eindhoven. In 1964 trad hij terug als redacteur van het *Nieuw Tijdschrift*. Wel bleef hij daarin publiceren.
In 1977 ging Veldkamp met emeritaat. Bij die gelegenheid verscheen in het *Nieuw Tijdschrift* een levensbericht over hem, geschreven door redacteur P.J. de Doelder [14]. Citaat: '... wij mogen gerust stellen, dat, als hij dit karwei niet gestart zou hebben, het tijdschrift [bedoeld wordt het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde*; MCvH] waarschijnlijk al lang ter ziele zou zijn geweest; ...'.
Veldkamp overleed op 16 september 1989. Postuum verscheen in *Euclides* nog zijn artikel 'De wiskunde-akten' [15], duidelijk met veel plezier geschreven door een man die zelf alle wiskundeakten behaald had en naderhand bewerkstelligde dat de aktenopleidingen hun kwaliteit en betekenis behielden.

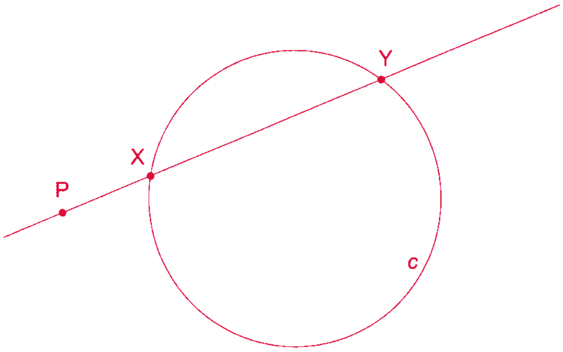
Een eigenschap van de rechte van Euler

De belangstelling voor de elementaire meetkunde was tot ver in de twintigste eeuw wijd verbreid. In het schoolprogramma van gymnasium, hbs en mulo werd er uitvoerig aandacht aan besteed. Op de universiteiten werd de elementaire meetkunde zeer serieus genomen. In de aktenopleidingen speelden het *Leerboek der Planimetrie* en het *Leerboek der stereometrie* van Molenbroek een grote rol. Deze boeken werden jarenlang verzorgd door P. Wijdenes, die tevens de grondlegger was van het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* en van *Euclides* (zie [2, p.148]).
In de achttiende en negentiende eeuw was een groot aantal nieuwe bijzonderheden van de driehoek ontdekt. Ook de eigenschap van de isodynamische as, bovengenoemd, was in de negentiende eeuw al gevonden; dat had redacteur W.A. van der Spek van het *Nieuw Tijdschrift* nagezocht. Ook tegenwoordig worden velen aangetrokken door de elementaire meetkunde.
Niet toevallig zijn de *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde* van Bottema heruitgegeven [10].
De isodynamische as mag zich niet verheugen in grote bekendheid. Dat is wel het geval met de rechte van Euler van een driehoek. Van een niet-gelijkzijdige driehoek ABC liggen het zwaartepunt Z, het middelpunt van de omgeschreven cirkel M, het hoogtepunt H, en het middelpunt van de negenpuntscirkel N op één lijn, de rechte van Euler.
Voor uitleg over de negenpuntscirkel en de rechte van Euler verwijzen we naar [10, IV] en naar [18].

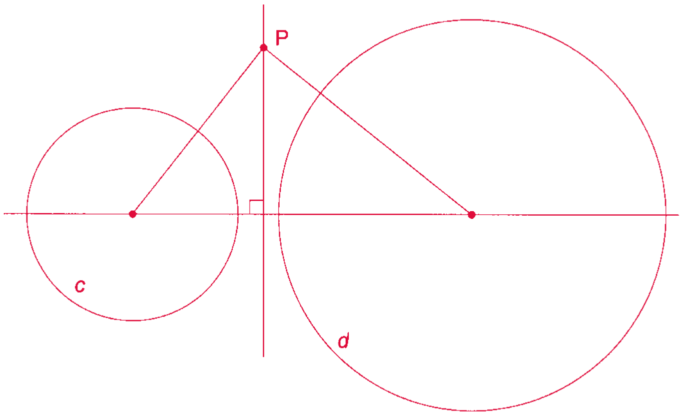
In dit artikel gaat het om een bijzondere eigenschap van de rechte van Euler, te weten om het feit dat de rechte van Euler loodrecht staat op de harmonicaal van het hoogtepunt. Deze eigenschap legde ik destijds voor aan Bottema en aan Veldkamp, en hun reacties waren mijns inziens karakteristiek voor hun werkwijze. De geschiedenis speelt zich af in het midden van de jaren '70.

Nadere toelichting

Eerst iets over de *harmonicaal* van een punt met betrekking tot een driehoek (**zie figuur 2**). We gaan uit van een driehoek ABC en een willekeurig punt P in het vlak van de driehoek. De lijnen AP, BP en CP snijden de overstaande zijlijnen in D, E en F. Op elke zijlijn wordt nu het vierde harmonische punt geconstrueerd, D' op BC, E' op CA en F' op AB, zodanig dat het paar D, D' harmonisch gescheiden wordt door het paar B, C, enz. Dan liggen de punten D', E' en F' op één lijn p, de harmonicaal of trilineaire poollijn van P ten opzichte van driehoek ABC. Een bewijs van het bestaan van de harmonicaal moet hier achterwege blijven.
Harmonische ligging van punten is een begrip uit de projectieve meetkunde. In de projectieve meetkunde gaat het alleen om incidentierelaties, zoals het op één rechte lijn liggen van drie of meer punten, en het door één punt gaan van drie of meer rechte lijnen. In het



FIGUUR 6 **De macht van een punt ten opzichte van een cirkel**



FIGUUR 7 **De machtlijn van twee cirkels**

bovenstaande geval is het voldoende te weten dat punt *D'* het lijnstuk *AB* extern in dezelfde verhouding verdeelt als punt *D* intern doet, d.w.z.
$D'A : D'B = -DA : DB$.
Meer over harmonische ligging staat in hoofdstuk XIX in [10].

Ik had met de harmonicaal kennis gemaakt door een college over projectieve meetkunde dat ik na mijn kandidaats (in Groningen) volgde bij dr. A. van Heemert. Het was duidelijk diens hobby, en hij wist zijn studenten te stimuleren tot nader onderzoek. Zo kon het gebeuren dat mijn studiegenoot Jan Burema het sterke vermoeden kreeg dat de harmonicaal van het hoogtepunt en de rechte van Euler loodrecht op elkaar staan. Hij had er een mooie tekening van gemaakt en meende dat ik de eigenschap wel kon bewijzen. Dat lukte mij inderdaad, maar de bewijsvoering – met behulp van rekenwerk in een cartesisch assenstelsel – bevredigde mij niet. Bovendien zou het interessant zijn te weten of deze eigenschap al ergens bekend was. Een aantal jaren later legde ik de eigenschap voor aan Bottema, wiens naam ik kende door zijn publicaties.

De reactie van Bottema

Bottema reageerde prompt op mijn schrijven. Hij schreef mij dat de eigenschap reeds vermeld werd in het boek van R.A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry* [16, p.199]. En enige dagen na zijn eerste reactie stelde Bottema mij voor de eigenschap te verwerken in een vraagstuk voor de Problem Section van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*. De redactie van dat vraagstuk had hij al meteen bijgevoegd, samen met een oplossing. Het vraagstuk is enige tijd later inderdaad als 'Problem 436' in het *Nieuw Archief* opgenomen [17]; zie figuur 3.
Bottema had mij met zijn voorstel voor een vraagstuk behoorlijk verrast. Bovendien kende ik niet alle door hem gebruikte begrippen. Zo gebruikte hij het begrip *isogonale verwantschap*, waarvan ik toen nog niet eerder gehoord had. In de door hem bijgevoegde oplossing gebruikte hij driehoekscoördinaten met het middelpunt *I* van de ingeschreven cirkel als eenheidspunt. Achteraf bezien ligt het allemaal voor de hand. Isogonale verwantschap staat in verband met spiegeling in bissectrices, en dus komt punt *I* al gauw op de proppen. En de isogonale verwantschap van *H* en *M* is eenvoudig in te zien.

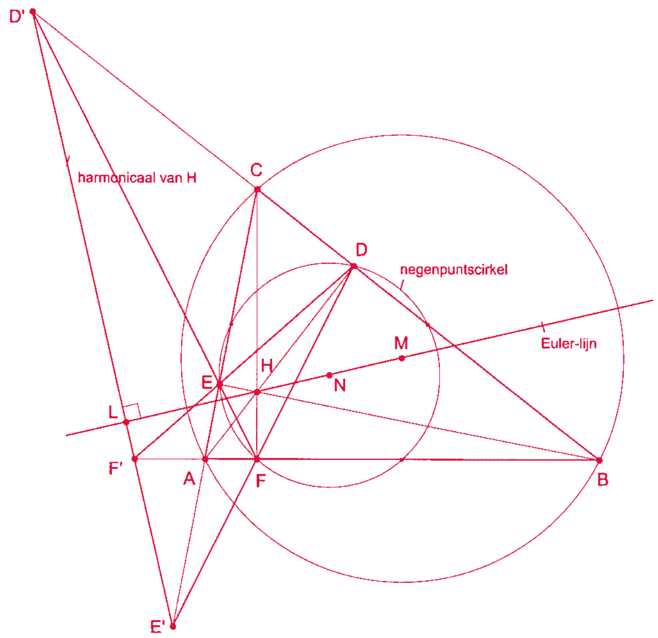
Nadere toelichting

Isogonale verwantschap is het volgende (**zie figuur 4**).
Neem een punt *P* in het vlak van driehoek *ABC*, en spiegel de lijnen *AP*, *BP* en *CP* in de respectieve bissectrices door *A*, *B* en *C*. Dan gaan de gespiegelde lijnen weer door één punt, *P'*. Omgekeerd gaan de gespiegelden van *AP'*, *BP'* en *CP'* door *P*. De punten *P* en *P'* heten isogonaal verwant.
Meer uitleg over de isogonale verwantschap staat in hoofdstuk XXIV van [10].

Bottema wilde ten behoeve van het vraagstuk, bovengenoemd, een verband leggen tussen de rechte van Euler en de harmonicaal van het hoogtepunt. Hij deed dat door de eigenschap dat de rechte van Euler loodrecht staat op de betreffende harmonicaal, te formuleren als een eigenschap van het hoogtepunt, te weten: de verbindingslijn met het isogonaal verwante punt (van het hoogtepunt) en de harmonicaal (van het hoogtepunt) staan loodrecht op elkaar. Het vraagstuk vroeg naar de meetkundige plaats van alle punten met deze eigenschap. Zijn bewijsvoering was algebraïsch.

De reactie van Veldkamp

Bottema stelde mij voor de eigenschap aan Veldkamp voor te leggen, en in mijn bijzijn belde hij Veldkamp onmiddellijk. Toen ik bij Veldkamp kwam, had deze de



FIGUUR 8 **De harmonicaal van *H* en de rechte van Euler**

eigenschap bekeken en was tot een meetkundige verklaring gekomen. Hij merkte op dat de harmonicaal van het hoogtepunt de machtlijn is van de omgeschreven cirkel en de negenpuntscirkel. Dit moet uiteraard bewezen worden; het gaat als volgt (hier wordt alleen het scherphoekige geval bekeken, in de situatie van **figuur 5**).
Laat *D*, *E* en *F* de voetpunten zijn van de hoogtelijnen uit *A*, *B* en *C*, en *F'* het met *F* harmonisch liggende punt op zijlijn *AB*. Dan is *F'* het snijpunt van lijn *DE* en zijlijn *AB*. Nu zijn de driehoeken *ABC* en *DEC* gelijkvormig. Dit volgt uit het feit dat *D* en *E* beide op de cirkel met middellijn *AB* liggen. De macht van *C* ten opzichte van deze cirkel is gelijk aan $CE \times CA$ en tevens gelijk aan $CD \times CB$, en daaruit volgt $CD : CE = CA : CB$. Nu is hoek CDE = hoek A, dus hoek ADF' = 90° – hoek A. Ook is hoek EBF' = 90° – hoek A. De driehoeken *F'AD* en *F'EB* hebben hoek *F'* gemeenschappelijk; deze driehoeken hebben blijkbaar gelijke hoeken, en zijn dus gelijkvormig. Hieruit volgt dat $F'A \times F'B = F'E \times F'D$. Het product $F'A \times F'B$ is de macht van *F'* ten opzichte van de omgeschreven cirkel, en het product $F'E \times F'D$ is de macht van *F'* ten opzichte van de negenpuntscirkel. *F'* heeft dus gelijke machten ten opzichte van deze cirkels. Dit geldt even goed voor de punten *D'* en *E'*, en dus is de harmonicaal van het hoogtepunt de machtlijn van beide cirkels. Deze harmonicaal staat daarom loodrecht op de verbindingslijn van de middelpunten van deze cirkels, en dat is de rechte van Euler.

Nadere toelichting

In het zojuist gegeven bewijs komt een *volledige vierhoek* voor, te weten vierhoek *ABDE*, waarvan (zoals in **figuur 5**) alle zes verbindingslijnen van de hoekpunten zijn getekend. *C* is het snijpunt van de lijnen *AE* en *BD*, *H* is het snijpunt van *AD* en *BE*, en *F'* is het snijpunt van *AB* en *DE*. De punten *C*, *H* en *F'* hebben eenzelfde soort positie ten opzichte van *ABDE*. In deze situatie geldt dat de punten *F* en *F'* harmonisch liggen ten opzichte van *A* en *B* (zie ook [10, XIX]).

Ook komt in het zojuist gegeven bewijs het begrip *macht van een punt ten opzichte van een cirkel* voor. De macht van een punt ten opzichte van een cirkel wordt als volgt gedefinieerd. Laat gegeven zijn een punt *P* en een cirkel *c*, en tevens een lijn door *P* die *c* in twee punten, *X* en *Y* snijdt (**zie figuur 6**), dan geldt dat het product $PX \times PY$ onafhankelijk is van de keuze van de lijn. Hierbij krijgen de lijnstukken een oriëntatie, d.w.z. bij tegengesteld gerichte lijnstukken *PX* en *PY* krijgt het product $PX \times PY$ een minteken. Het product $PX \times PY$ heet de *macht* van punt *P* ten opzichte van cirkel *c*. Zie hiervoor hoofdstuk III van [10]. Zijn nu twee cirkels *c* en *d* gegeven, dan is de verzameling van de punten die ten opzichte van *c* en *d* een gelijke macht hebben, een rechte lijn die loodrecht staat op de verbindingslijn van de middelpunten van *c* en *d*. Deze lijn heet de *machtlijn* van *c* en *d* (**zie figuur 7**).

Het knappe van Veldkamp was zijn observatie dat de harmonicaal een machtlijn zou kunnen zijn. Ook dit resultaat was eerder gevonden; het wordt al vermeld in het boek van Johnson [16]. Maar Veldkamp had dit boek niet en hij had ook niet van Bottema gehoord wat Johnson over de betreffende eigenschap vermeldde. Veldkamp had trouwens een heel anders samengestelde bibliotheek dan Bottema.
Figuur 8 brengt de eigenschap van de rechte van Euler waarover het hier gaat, in beeld.

Slot

Uiteraard is naar aanleiding van bovengenoemde eigenschap van de rechte van Euler meer te zeggen. Het ging mij er in dit artikel om de reacties van Bottema en Veldkamp weer te geven, twee meetkun-

BOTTEMA, WRITER AND LITERATOR

Bottema is an erudite man. He is extremely wellread and has a vast knowledge of history. As to foreign literature, he prefers English and French to German. Reading is to Bottema the breath of life. He enjoys a piece of well-written prose or a beautiful poem like a gourmet enjoys a well-prepared dish. His own non-mathematical papers show that he is a brilliant stylist with an exceptional mastery of the language. It would be a grave mistake to ignore the literary writings for anyone who wants to appreciate Bottema's personality in full. Being well aware of this fact, his numerous friends presented him on his seventieth birthday with a book written by himself. It contains a choice of his public addresses and articles in literary journals. The donors found their inspiration for the title: *Steen en Schelp* (Stone and Shell) in the address of the same name delivered by Bottema on the occasion of the fiftieth anniversary of the TUD. There he tells that he has been inspired by the famous poem, 'The Prelude' by William Wordsworth who is one of his favorite poets.

FIGUUR 9 Uit G.R. Veldkamp: Oene Bottema, A Biographical Sketch [5, pp.249-276]

digen die elkaar zeer goed kenden.
Zij waardeerden elkaar ook persoonlijk, getuige Veldkamps bewoordingen in het artikel naar aanleiding van Bottema's 60-jarig doctorsjubileum [5]; zie ook figuur 9.

Na het overlijden van Veldkamp werd ik in de gelegenheid gesteld alle jaargangen van *Euclides* en het *Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde* uit zijn nalatenschap mede te nemen. Ik maak er nog jaarlijks gebruik van om de afleveringen van de rubriek '40 jaar geleden' voor *Euclides* samen te stellen. Veldkamp had de tijdschriften intensief gebruikt, getuige de vele aantekeningen die hij erin had aangebracht. Geregeld had hij tekeningen in het *Nieuw Tijdschrift* verbeterd. Jammer genoeg had hij een deel van de door hemzelf geschreven bijdragen uitgeknipt. Die bijdragen moet ik elders zoeken.

Noten en literatuur

[1] Bastiaan Willink: De tweede Gouden Eeuw, Amsterdam (1998)

[2] F. Goffree, e.a.: Honderd jaar wiskundeonderwijs, Leusden (2000). Dit is het jubileumboek van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. In het openingshoofdstuk wordt onder de kop 'Het succes van nieuwe schooltypen' met name de hbs behandeld; in hoofdstuk 2 blikt Dirk Struik terug op zijn schooltijd.

[3] O. Bottema : Prof. dr. W. van der Woude (15.01.1876–23.09.1974). Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 62 (1975), pp.137-138

[4] O. Bottema: W. van der Woude (1876-1974). Nieuw Archief voor Wiskunde, derde serie, deel XXIII (1975), pp.1–7

[5] G.R. Veldkamp: Oene Bottema, A Biographical Sketch. Nieuw Archief voor Wiskunde, vierde serie, deel 5 (1987), pp.249–276. Van dit artikel met bijgevoegde bibliografie is hier dankbaar gebruik gemaakt.

[6] O. Bottema: De elementaire meetkunde van het platte vlak, Groningen (1938)

[7] O. Bottema: Hoofdstukken uit de elementaire meetkunde, Den Haag (1944)

[8] O. Bottema, R.Z. Djordjevic, R.R. Janic, D.S. Mitrinovic, P.M. Vasic: Geometric Inequalities. Groningen (1969)

[9] O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde. Utrecht (1985). Vermeerderde heruitgave van het gelijknamige werk uit 1944, in de Epsilon-serie.

[10] O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde. Utrecht (1997). Heruitgave van het gelijknamige werk uit 1985, wederom in de Epsilon-serie, nu met een appendix door J.M. Aarts. Naar deze uitgave uit 1997 wordt in het artikel een aantal malen verwezen. Zie ook de Noot van de redactie op pagina 121.

[11] O. Bottema: Verscheidenheden. Sine loco (1977).

[12] G.R. Veldkamp: Naschrift. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 47 (1959), pp.125–126. Overgenomen in Euclides 75 (2000), p.139.

[13] G.R. Veldkamp: Sprokkel 167. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 62 (1975), p.293

[14] P.J. de Doelder: Prof. dr. G.R. Veldkamp 70 jaar. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 65 (1978), pp.95–96. Uit dit artikel zijn enkele biografische gegevens omtrent Veldkamp gehaald.

[15] G.R. Veldkamp: De wiskundeakten. Euclides 65 (1989), pp.100–107.

[16] Johnson, R.A.: Advanced Euclidean Geometry. New York (1960). Een eerdere versie van dit werk was in 1929 verschenen onder de titel Modern Geometry.

[17] Vraagstuk in Nieuw Archief voor Wiskunde derde serie deel XXIV (1976), p.184. Oplossing in Nieuw Archief voor Wiskunde derde serie deel XXV (1977), pp.90–92.

[18] Dick Klingens: Van achtpunts-, via zespunts-, naar negenpuntscirkel in Euclides 77 (nr. 4, januari 2002), pp.178–180

Over de auteur

Martinus van Hoorn (mc.vanhoorn@wxs.nl) was gedurende de periode 1987-1996 hoofdredacteur van Euclides.

1284. Gegeven is de lijn $y = 2x + 1$ en een punt A op deze lijn; de x-coördinaat van A wordt voorgesteld door λ.

a. Gevraagd de vergelijking van de hyperbool, die de lijnen $y + 2x = 0$ en $y - 2x = 0$ tot asymptoten heeft en door het punt A gaat.

b. Stel de vergelijking op van de raaklijn in A aan deze hyperbool. Bij veranderlijke λ stelt deze vergelijking een stelsel lijnen voor. Bewijs, dat alle lijnen van dit stelsel door één punt gaan, en bereken de coördinaten van dit punt.

H.B.S.-B, 1961.

1297. De raaklijn in A_k aan de omgeschreven cirkel van $\triangle A_1A_2A_3$ snijdt de overstaande zijlijn in B_k; C_k is het midden van A_kB_k ($k = 1, 2, 3$). Bewijs, dat C_1, C_2 en C_3 collineair zijn.

1298. Gegeven zijn de parallelogrammen ABCD en P'Q'R'S'. Construeer het parallelogram PQRS $\sim$ P'Q'R'S' met P op AB, Q op BC, R op CD en S op DA.

H. G. A. VERKAART †

1301. In de ongelijkzijdige driehoek ABC is $\cos A + \cos B = 1$. Bewijs dat het raakpunt van de negenpuntscirkel en de ingeschreven cirkel op de hoogtelijn uit C ligt.

W. A. VAN DER SPEK

1303. De poollijn van het punt P t.o. van de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ snijdt de lijn door A($-2a$; 0) en P in S.

Gevraagd de meetkundige plaats van S, als P de lijn $x = {}^1/_2a$ doorloopt.

(H.B.S.-B, 1961)

Vraagstukken uit het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 49 (1961-1962)

De rubriek '40 jaar geleden' wordt verzorgd door Martinus van Hoorn (e-mail: mc.vanhoorn@wxs.nl), voormalig hoofdredacteur van Euclides (1987-1996).



DE TRITMETISCHE LIJN VAN P.J. BAUDET

Over een 19de-eeuwse onderwijzer en een klassiek meetkundig probleem

Meetkunde is weer terug van weggeweest. Weliswaar gaat het slechts om een klein stukje in het programma van de B-leerlingen, maar zo lang het Ministerie de onderdelen niet uit de eindexamenstof schrapt, krijgen onze vwo-B-ers een leuk stukje meetkunde op hun bord.

[Danny Beckers]

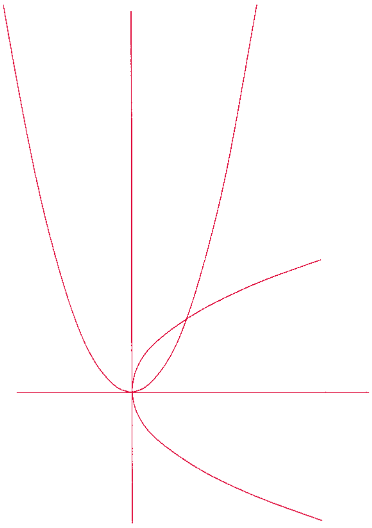
Meetkunde spreekt de leerlingen ook aan. Zo zeer zelfs dat ze er een praktische opdracht aan wijden. Meetkunde kan met plaatjes, en dat maakt de vlakke meetkunde tot een relatief toegankelijke tak van wiskunde. Volkomen terecht dus dat de helft van de boekjes uit de *Zebra*-reeks (tot nu toe) meetkunde-gerelateerd is.
Meetkunde op de middelbare school is lange tijd een deductief, axiomatisch opgezet corpus van stellingen en bewijzen geweest, waarmee de leerling geacht werd te leren denken. In de loop van de twintigste eeuw raakte het vak in diskrediet en verdween het geheel van het programma [10]. In meer hedendaagse didactische vormen gegoten is meetkunde nu weer terug van weggeweest. Met het onderwerp 'bewijzen' in de B12-variant van het vwo is er zelfs een beetje een terugkeer naar de oude meetkundelessen.

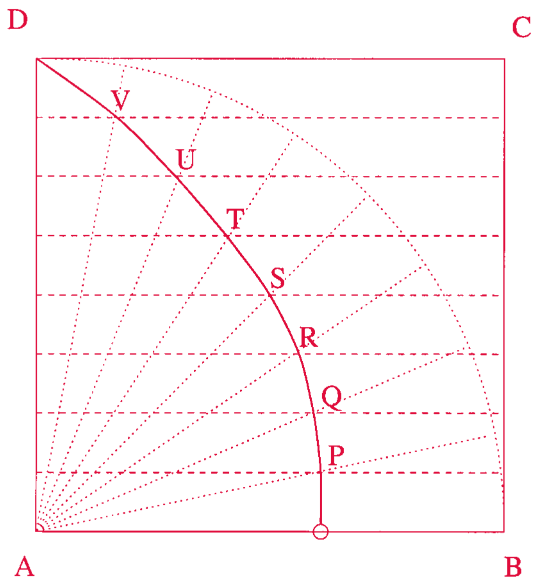
Een onderwijzer en zijn fascinatie

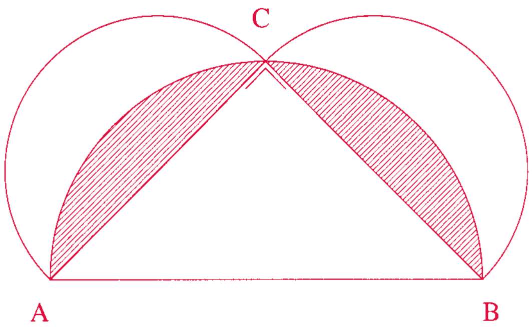
Dit artikel vertelt een geschiedenis. Een geschiedenis die zich afspeelt tegen de achtergrond van 'heel' oude meetkundelessen; lessen van de vroeg negentiende-eeuwse wiskundeleraar P.J. Baudet. Hij bedacht geen briljante nieuwe stellingen, en hij had ook geen diepe nieuwe inzichten die het noodzakelijk maken dat iedere historicus van de wiskunde zijn werk bestudeert. Wel had hij interesse voor meetkunde, het vak dat hij ook doceerde. Daarmee was hij een exponent van zijn tijd. In 1834 publiceerde hij een 15 pagina's tellend traktaatje over het (meetkundige) probleem van de driedeling van een hoek [8].
Het verhaal van Baudet is om een drietal redenen interessant. Op de eerste plaats is het gewoon goed om te zien dat iemand in de jaren 1830 ook bezig was met wiskundeonderwijs en daarnaast een dergelijke interesse ontwikkelde. Dat is plezierig herkenbaar, en geeft aan dat het wiskundeonderwijs een traditie ontwikkelt die we niet mogen vergeten. Ten tweede is het aardig, omdat juist het probleem van de driedeling van een hoek dit hele verhaal in een nog veel oudere traditie plaatst. Het herinnert ons aan het feit dat wiskunde ouder is dan onze jaartelling. Met name brengt het in herinnering dat we - zij het met totaal andere motivatie - een gemeenschappelijke interesse vertonen met meer dan honderd generaties voor ons, wanneer we ons met meetkunde bezig houden. Het 'ten derde' is actueler. De fascinatie voor meetkunde van Baudet behoeft uit historisch oogpunt wellicht een context-verhaal, omdat zijn motieven zo verschillen van onze drijfveren vandaag de dag. Maar een leraar heeft toch eigenlijk een onderwerp (en liefst meer) uit zijn vakgebied nodig waar hij enthousiast voor is. Al is het maar om zijn leerlingen te kunnen laten zien dat wiskunde leuk is. Meetkunde is dan een goede manier om te beginnen.
Het standaardwerk over de meetkunde uit de klassieke oudheid, *De Elementen* van Euclides, is in zijn geheel, inclusief beweegbare plaatjes, via Internet beschikbaar [1]. Het eerste boek biedt een systematische opbouw in 48 stellingen van de vlakke meetkunde tot en met de stelling van Pythagoras en zijn omgekeerde. Het laatste boek (XIII) eindigt met het bewijs van de stelling dat er precies vijf platonische lichamen bestaan. Voor de leerling doen de boeken een beetje vegetarisch aan.
Het feit dat bij constructies alleen gebruik mag worden gemaakt van passer en liniaal lijkt niet helemaal van deze tijd (hoewel het helpt dat meetkunde-programmatuur als CABRI hetzelfde doet). Het bekende commentaar van Proclus bij het bewijs van de geldigheid van de driehoeksongelijkheid (een ezel neemt ook geen omweg) zou in een wat meer hedendaagse versie ('dat zie je toch zo, ezel!') uit de mond van een leerling kunnen komen.
Kortom, meetkunde - en dan bedoel ik niet noodzakelijk Euclides - is actueel. Tweehonderd jaar terug was meetkunde ook al een *hot item*. De meetkundeactiviteiten van Baudet illustreren dat. In dit artikel zal die meetkundige preoccupatie van Baudet in zijn context worden beschreven. Om dat te kunnen doen is het nodig een slordige 2000 jaar terug in de tijd te gaan, om een beschrijving te geven van een deel van het collectieve geheugen van de vroeg 19de-eeuwse wiskundigen en wiskunde-onderwijzers.

Klassiek intermezzo

Baudet schreef voor zijn mede-onderwijzers een traktaatje over het probleem van de driedeling van de hoek. De driedeling van de hoek is één van de drie klassieke meetkundige problemen. Alledrie zijn ze terug te vinden in *De Elementen*.
Het eerste probleem was een verdelingsprobleem dat in boeken (lees: hoofdstukken) I en VI van Euclides' werk over de vlakke meetkunde een rol speelde. Stelling I.9 van *De Elementen* bevat de constructie van de helft van een gegeven (willekeurige) hoek. Stelling I.10 bevatte vervolgens de constructie van de helft van een gegeven lijnstuk. In boek VI worden gelijkvormigheids-eigenschappen behandeld. In stelling VI.9 wordt wel de halvering van een lijnstuk uitgebreid naar verdeling in n gelijke stukjes, maar de verdeling van een hoek in n gelijke stukjes komt niet voor. Een verdeling in 2^k stukjes is natuurlijk niet zo'n probleem als je kunt halveren, dus ligt het voor de hand te gaan kijken naar een constructie om een hoek te verdelen in p stukjes, met p een priemgetal. Een constructie die een willekeurige hoek in drie gelijke stukjes verdeelt, is al een probleem. Dit probleem staat bekend onder de naam *driedeling van de hoek*. Overigens wordt het probleem vaak ten onrechte zo geformuleerd, alsof het onmogelijk zou zijn om willekeurig welke hoek in drie gelijke hoeken te delen. Dat is natuurlijk onzin: hoeken van 30, 60 of 90 graden zijn gewoon met passer en liniaal te construeren, en dus zijn bijvoorbeeld hoeken van 90, 180 en 270 graden probleemloos in drie gelijke stukken te verdelen. Het procédé werkt echter niet algemeen.
Terug naar *De Elementen*. Het tweede probleem zien we terug in de boeken II en III. Boek II gaat over het vergelijken van de oppervlaktes van vlakke figuren. Dat gebeurt helemaal zonder dat er een oppervlakte concreet werd uitgerekend. Boek II culmineert in







FIGUUR 1, 2, 3

stelling II.14, waarin de constructie wordt beschreven van een vierkant dat even groot is (lees: dezelfde oppervlakte had) als een gegeven veelhoek. Het construeren van een vierkant dat even groot is als een gegeven figuur, heet het kwadreren van die figuur. Boek III bevat 37 stellingen met betrekking tot de cirkel, zonder dat aan bod komt hoe (met passer en liniaal) een vierkant kan worden geconstrueerd dat even groot is als een gegeven cirkel. Wel wordt in XII.2 nog bewezen dat (de oppervlaktes van) twee cirkels zich tot elkaar verhouden als de vierkanten op hun diameters, maar daarvoor is het kanon van de exhaustiemethode al nodig. Het probleem van de constructie van een vierkant dat even groot is als een gegeven cirkel stond en staat bekend als de *kwadratuur van de cirkel.*

Het derde probleem tenslotte was een stereometrie-probleem en komt tot uitdrukking in boek XII. In dat boek worden verschillende ruimtelijke figuren geïntroduceerd: de piramide, het prisma, de cilinder, de kegel, de kubus en de bol. De stellingen van boek XII zijn allemaal gericht op aan te geven hoe de inhouden van dergelijke figuren zich tot elkaar verhouden. In feite lijkt boek XII daarin een beetje op boek VI, waar met behulp van gelijkvormigheid van vlakke figuren de oppervlaktes van veelhoeken in elkaar worden uitgedrukt. Een van de stellingen in dat boek (VI.25) beschrijft bijvoorbeeld de constructie van een figuur met een voorgeschreven oppervlakte, die gelijkvormig is met een gegeven veelhoek. Een vergelijkbare stelling ontbreekt in boek XII. Een dergelijke stelling zou kunnen worden toegevoegd wanneer het mogelijk was om een kubus te construeren die n keer zo groot is als een andere kubus. Maar zelfs een kubus construeren die de dubbele inhoud heeft van een gegeven kubus valt niet mee, en dat terwijl het zo gemakkelijk is om een vierkant te construeren dat de dubbele oppervlakte heeft van een gegeven vierkant. Dit probleem is bekend geworden onder de titel *verdubbeling van de kubus.*

Maantjes en parabolen

Het aardige van de drie klassieke problemen is niet dat de oorspronkelijke problemen niet oplosbaar zijn. De bewijzen voor hun onoplosbaarheid zijn ingewikkeld en ook voor Baudet was nog niet duidelijk of de problemen al dan niet oplosbaar waren. Niet weten of iets kan, heeft ook een bepaalde charme. Het aardige zit hem vooral in het feit dat wiskundigen eeuwenlang hebben getracht een oplossing te vinden, en in die zoektocht een heleboel andere wiskunde hebben ontwikkeld.

Wat betreft de cirkelkwadratuur lukte het bijvoorbeeld eerst in de achttiende eeuw om te bewijzen dat π niet rationaal is, en daarmee was nog niet aangetoond dat de kwadratuur van de cirkel onmogelijk was. Vele amateur-wiskundigen wierpen zich dan ook op het probleem. Veel van de cirkelkwadratuurtraktaatjes bevatten totaal onleesbare getallenmystiek, maar er zijn ook heel ingenieuze constructies, waarbij de fout

in het begeleidende bewijs zich maar heel lastig laat traceren. Daarnaast zijn er echter een aantal heel elementaire resultaten die naar aanleiding van dit probleem zijn ontwikkeld, en die de aandacht meer dan waard zijn.
De kwadratuur van de cirkel werd bijvoorbeeld aangepakt door Hippocrates van Chios (ca. 460-380 v. Chr.). Naar hem vernoemd zijn de zogenaamde maantjes van Hippocrates. Zijn idee was, dat wanneer het mogelijk was om delen van de cirkel te kwadreren, dat dan vervolgens de cirkel wellicht kon worden opgedeeld in stukjes die allemaal afzonderlijk gekwadreerd konden worden. Een van de vormen die het hem lukte te kwadreren, waren de maantjes. De eenvoudigste daarvan is de volgende. Neem een gelijkbenige driehoek ABC met een rechte tophoek in C (zie figuur 1). Nu is vanwege de stelling van Pythagoras de verhouding tussen AC (of BC) en AB gelijk aan $1 : \sqrt{2}$. Trek de halve cirkels op AB, BC en AC. De totale oppervlakte van de beide kleine cirkelhelften is vanwege de gelijkvormigheidsfactor gelijk aan de oppervlakte van de halve cirkel op AB. Halen we nu van die gelijke oppervlaktes de gemeenschappelijke gearceerde delen weg, dan blijkt dat de oppervlakte van de beide maantjes gelijk is aan de oppervlakte van de driehoek waarmee we begonnen. Een maantje van de beschreven vorm kan dus eenvoudig gekwadreerd worden. Helaas bleek het niet mogelijk om de cirkel samen te stellen uit maantjes, zelfs niet wanneer daar nog andere typen maantjes bijkwamen [9, pp.75-81].
De verdubbeling van de kubus werd in de oudheid onder andere aangepakt door extra instrumenten te veronderstellen. Vervolgens was dan de vraag of de resultaten van die extra instrumenten ook met passer en liniaal konden worden nagebootst. Wanneer we bijvoorbeeld een instrument hadden dat parabolen kan tekenen, dan kon de verdubbeling van de kubus worden opgelost, zoals Menaechmus (ca. 350 v. Chr.) aantoonde. Het verdubbelen van de kubus komt immers neer op het trekken van de derdemachtswortel uit 2, en die kunnen we (in moderne termen) eenvoudig construeren als de x-waarde van het snijpunt van de parabolen $y = x^2$ en $x = \frac{1}{2}y^2$ (zie figuur 2). Met substitutie kan men nagaan dat voor die waarde inderdaad geldt $x = \sqrt[3]{2}$. Op analoge wijze is het mogelijk om de derdemachtswortel uit een willekeurig getal te construeren. Een parabool viel echter niet te construeren met passer en liniaal, wel met weer andere instrumenten die daartoe in de zeventiende eeuw werden ontwikkeld.

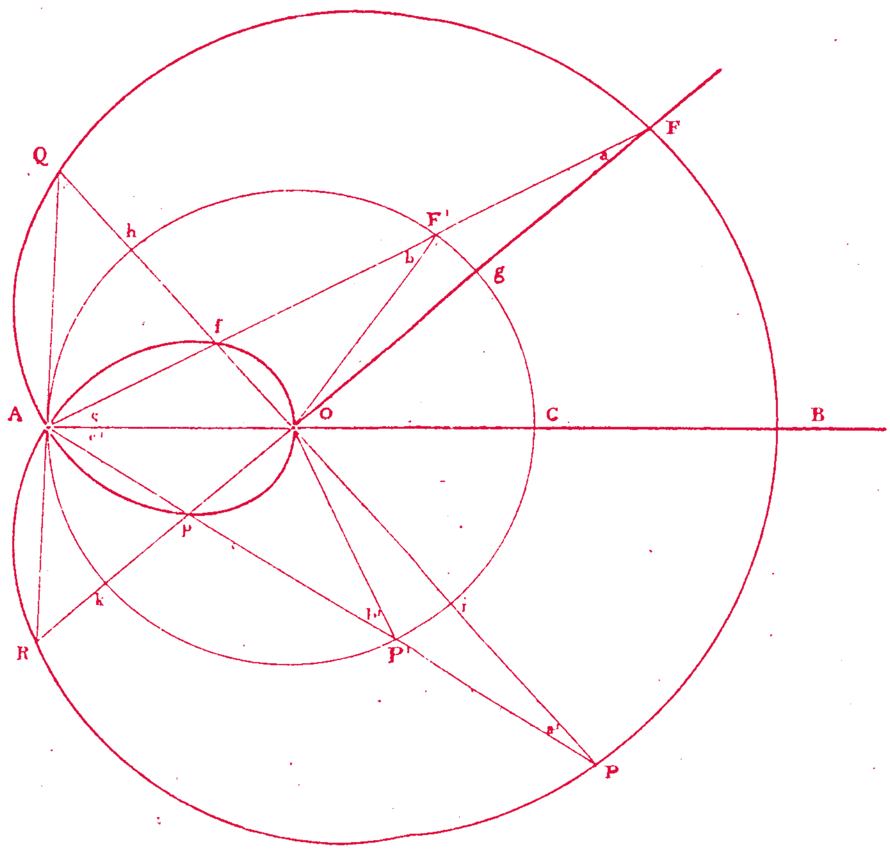
Driedeling van de hoek

Ook de driedeling van de hoek kan met extra machinerie worden opgelost. Een aantal mogelijke constructies staat op [2]. De meest eenvoudige, en tevens een van de oudste manieren om de driedeling van de hoek te verrichten, is met behulp van de kwadratrix van Hippias (ca. 420 v. Chr.). Om de kwadratrix te construeren ging Hippias uit van een vierkant. In vierkant ABCD vinden gelijktijdig twee bewegingen plaats (zie figuur 3). Om A draait met constante hoeksnelheid een lijnstuk dat in AB begint, en naar AD toedraait. Gelijktijdig schuift een lijnstuk omhoog, beginnend in AB en steeds evenwijdig aan AB. De bewegingen zijn zodanig op elkaar afgestemd dat de roterende beweging in AD aankomt, juist op het moment dat het schuivende lijnstuk samenvalt met DC. De baan die het snijpunt van de beide lijnstukken doorloopt, $PQRSTUVD$, noemen we de kwadratrix.
Dat de kwadratrix kan helpen bij de driedeling van de hoek, is erg eenvoudig in te zien. Neem een hoek tussen de 0 en 90 graden. Leg het hoekpunt in A en het ene been van de hoek langs AB. Het andere been snijdt de kwadratrix in een punt, bijvoorbeeld in U. Vanuit U trekken we de loodlijn op AD. Het gedeelte van AD onder het voetpunt van die loodlijn kunnen we eenvoudig in drie gelijke stukjes verdelen (volgens Euclides VI.9) en die stukjes corresponderen volgens de constructie van de kwadratrix ieder met een derde deel van de hoek waarmee is begonnen. In het geval van de hoek BAU, weten we dat BAQ precies een derde van die hoek vormt.
De constructie van de kwadratrix lukt echter niet met alleen passer en liniaal. Hetzelfde geldt voor alle andere krommen die bedacht zijn om het probleem van de driedeling van de hoek te kunnen oplossen. In het geval van de kwadratrix gebruikte Hippias zelfs een beweging om zijn kromme te definiëren. Dat werd door de Griekse meetkundigen over het algemeen niet toegestaan.

Onderwijzers 1800-1850

Nu maken we de sprong terug naar de vroege 19de eeuw. De hierboven beschreven pogingen om de drie klassieke problemen aan te pakken (en nog veel meer) waren bekend onder de goed opgeleide vroeg negentiende-eeuwse middenklasse. Tevens was de situatie rond meetkunde totaal veranderd. Het vak was in wiskundig opzicht lang niet meer zo belangrijk als in de Griekse oudheid, toen het de manier was om exacte kennis te verkrijgen en het gehele wiskundecorpus domineerde. Aan de andere kant was het ook niet meer het vak dat slechts was weggelegd voor een enkele staatsman of filosoof. Rond 1800 kwam in alle Europese landen een zwaarder accent op wiskunde in de programma's van tal van onderwijsvormen. Faculteiten der wis- en natuurkunde werden in deze periode opgericht. Vooral meetkunde werd beschouwd als een belangrijk onderdeel in de (wiskundige) vorming van jonge mensen. Meetkunde was het oudste onderdeel van de wiskunde: algebra en analyse hadden zich in de voorgaande eeuwen ontwikkeld, maar er bestonden nog nauwelijks lesboeken waarin die onderdelen zo systematisch van de grond af werden opgebouwd als in *De Elementen* gebeurde. Daar werd wel hard aan gewerkt, maar voor de meetkunde lag er dus al een voorbeeld, en dat diende als maatstaf voor een goede en gedegen (wiskundige) redenering.

In Nederland was sinds 1815 een stevige portie meetkunde verplicht onderdeel van het curriculum aan

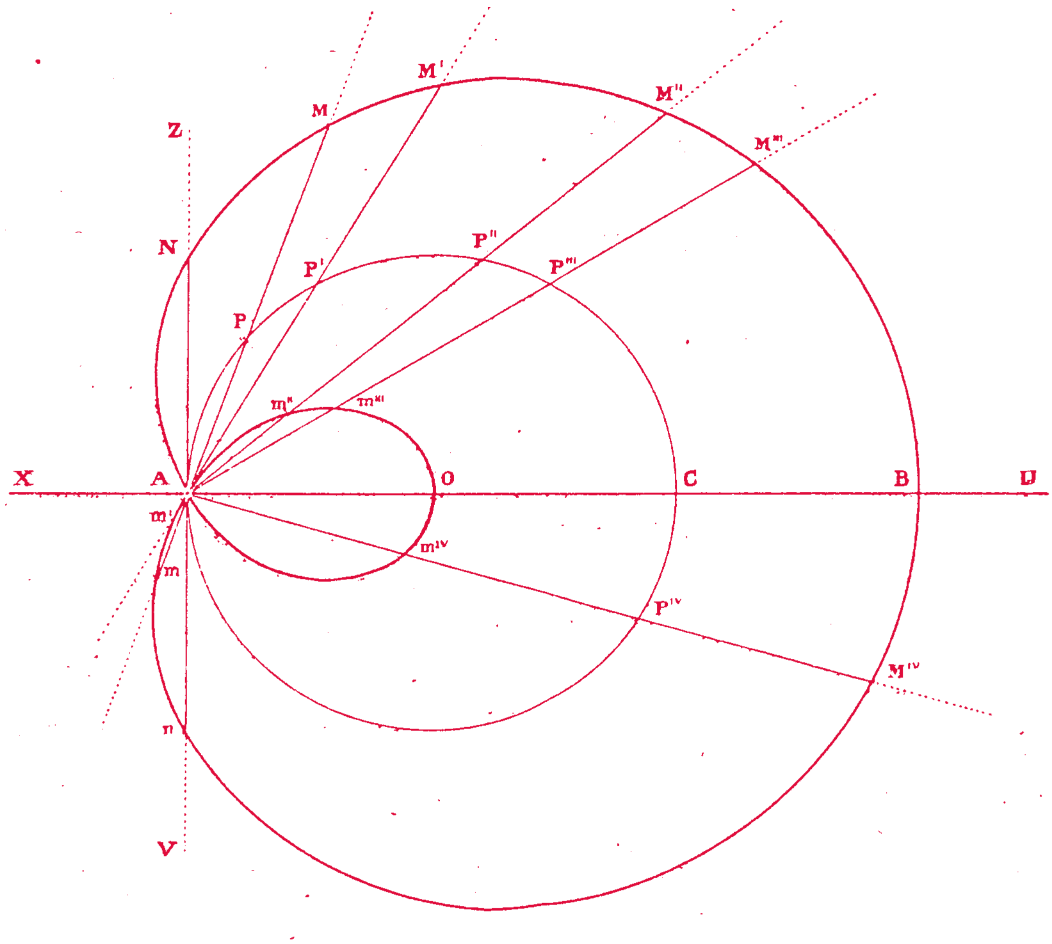


FIGUUR 4

alle Latijnse en Fransche scholen (grofweg: middelbaar onderwijs). Helemaal van harte ging dat niet, maar de veronderstelde 'vormende waarde' die van goed (lees: Euclidisch) meetkundeonderwijs zou uitgaan, won het van de oude opvatting die kennis van de oude talen als maatgevend beschouwde voor een goede opleiding [7].
In Duitsland was deze ontwikkeling met name van grote invloed op de beoefening van wiskunde, en die van meetkunde in het bijzonder. Gepromoveerden van de Duitse universiteiten vonden werk als onderwijzers wiskunde aan de gymnasia. Voor de goeden onder hen was een baan aan het gymnasium een soort wachtkamer tot een aanstelling aan een universiteit in zicht kwam. Dat betekende onder andere dat Duitse wiskundeleraren zich verder in de wiskunde bekwaamden, en zij ook niet zelden nog wiskundige artikelen publiceerden [12]. Meetkunde was een geliefd onderwerp. De stelling van de negenpuntscirkel (zie [1] onder Feuerbach) werd bijvoorbeeld door een leraar wiskunde van het gymnasium te Erlangen gepubliceerd.
In Nederland waren er beduidend minder vacatures en speelden de gymnasia nauwelijks de rol die zij in Duitsland vervulden. Wel was voor meetkunde een belangrijke functie weggelegd in de vorming van onderwijzers: door middel van een rangensysteem kwamen alleen mensen met een behoorlijke kennis van de elementaire meetkunde voor de betere onderwijs-baantjes in aanmerking [5]. Bovendien was meetkunde toegankelijk, en de openstaande problemen zoals de drie klassieke problemen, waren gemakkelijk te begrijpen. Het is dan ook nauwelijks verrassend dat er veel aandacht was voor meetkunde onder de Nederlandse onderwijzers, en dat er af en toe stukken over de klassieke problemen of andere meetkundige constructies werden gepubliceerd.

P.J. Baudet en zijn publiek

Pierre Joseph Baudet (1778-1858) was een Franse emigrant die zich tegen het einde van de achttiende eeuw te Deventer vestigde als onderwijzer in de Franse taal en de wiskunde. Voor beide vakken schreef hij lesmethoden die enige populariteit genoten en goede recensies kregen. De zoon van koning Willem I (de latere Willem II) kreeg bijvoorbeeld les uit de leerboekjes Frans van Baudet. Baudet was een warm voorstander van degelijk wiskundeonderwijs, maar wilde zijn leerlingen ook op het hart drukken dat kennis alleen dan nuttig was wanneer ze kon worden toegepast. Een praktisch vraagstuk kon voor hem aanleiding zijn om theorie te ontwikkelen, dit in tegenstelling tot andere opvattingen over didactiek in zijn tijd. Baudet was een goede onderwijzer, en al snel haalde hij het examen voor de hoogste rang. Dit stelde hem in staat om met enige kans op succes naar de betere posities te solliciteren. Korte tijd zou hij wiskunde doceren te Leeuwarden, maar door het wangedrag van een van zijn zoons (die later overigens ook onderwijzer zou worden) werd het leven hem daar onmogelijk gemaakt. Hij bouwde opnieuw aan zijn



FIGUUR 5

carrière aan een prestigieus instituut te Vaassen. Zijn werk werd beloond toen hij in 1838 tot onderwijzer in de wiskunde aan het gymnasium te Utrecht werd benoemd. Al met al een mooie loopbaan [6].
In 1824 schreef hij een meetkundeboek waarin hij in dialoogvorm een onderwijzer samen met een aantal leerlingen meetkunde liet bedrijven. De leerlingen werden door de onderwijzer gestimuleerd zelf bewijzen te formuleren voor de diverse stellingen die ze –veelal proefondervindelijk– op het spoor kwamen. Een van de onderwerpen die aan bod kwamen, was een algoritme voor de worteltrekking, inclusief een door de leerlingen geformuleerd 'bewijs'. De leerlingen waren tamelijk ideale leerlingen, maar desalniettemin wekt dit meetkundeboek bewondering. Baudet ging moeilijkheden niet uit de weg, en was zich duidelijk bewust van de problemen die leerlingen hadden met stukken van de stof. Men kan zich voorstellen dat de onderwijzer het boek naar aanleiding van zijn eigen lessen heeft geschreven [11].
Aan het instituut te Vaassen publiceerde hij in 1834 een stuk over de driedeling van de hoek: *Korte beschrijving eener tritmetische lijn* heette het werk. Traktaatjes zoals de Tritmetische lijn waren voor Baudet een manier om zijn professionaliteit te tonen: aan de buitenwereld te laten zien wat hij waard was. Hij stuurde exemplaren onder andere aan het Wiskundig Genootschap. Vermoedelijk had hij zijn carrière mede aan zijn geschriften te danken. Aan de andere kant was het een uiting van een interesse, die hij met vele van zijn tijdgenoten deelde. Meetkunde was in, en het probleem van de driedeling van een hoek kon menigeen plaatsen. In de inleiding van het traktaatje liet Baudet zien dat hij echt wel wist dat het probleem reeds eerder met andere kromme lijnen was opgelost, en ook dat het geen belangrijk probleem was. Hij had er gewoon aardigheid in om aan de reeds bestaande oplossingen de zijne toe te voegen [8]. Collega's waardeerden hem ook voor deze bijdrage.

De tritmetische lijn

De bewuste kromme gaat uit van een cirkel. In figuur 4 is dat de cirkel met middelpunt O en middellijn AC. Kies nu een punt P op de cirkelomtrek. Vanuit een punt A op de omtrek van de cirkel trekken we de lijn door P. Vanuit P passen we dan de straal van de cirkel af op de lijn AP: we kiezen op de lijn door AP punten m en M zodanig dat $Pm = PM = OA$. Wanneer we P over de cirkelomtrek laten lopen ontstaat aldus de tritmetische lijn $MM'M'm'm'm$. De kromme gaat onder andere door het middelpunt van de cirkel (namelijk voor $P = C$) en heeft een singulier punt te A. De constructie kan voor het geval $P = A$ continu worden voortgezet met de raaklijn aan de cirkel te A, en levert dan de punten N en n op. Hoewel de punten N en n wel in de tekening staan vermeld, gaat Baudet niet afzonderlijk op die punten in: dat was bij meetkundige constructies als deze evident toegestaan. Gegeven nu een hoek, leg het hoekpunt op het middelpunt van de cirkel, en het ene been van de hoek

langs de middellijn AC van de cirkel die voor de constructie van de tritmetische lijn is gebruikt. Het andere been van de hoek snijdt dan de tritmetische lijn in een zeker punt F, en de hoek AFO is dan precies het derde deel van de gegeven hoek. De verlossende hulplijnen staan in de figuur: laat F' het snijpunt van AF met de cirkel zijn, dan is F' tevens het punt dat gebruikt werd om F op de tritmetische lijn te construeren. Dus $FF' = AO = OF'$, en dus zijn zowel de driehoeken $F'OF$ als AOF' gelijkbenige driehoeken. Noem hoek AFO even α, dan valt met deze informatie eenvoudig af te leiden dat hoek $FOB = 3\alpha$ is. De geschetste constructie doet dus hetgeen we verlangden (zie figuur 5).
De kromme van Baudet en de wijze waarop hij die in [8] introduceert, zijn heel begrijpelijk. Het aardige van zijn traktaat is dat het meetkunde met analytisch rekenwerk combineert: zo wordt de kromme meetkundig (puntsgewijs) geconstrueerd, en vervolgens van een formule voorzien. Niet eenvoudig, maar ook voor leerlingen vandaag de dag (met enige hulp) goed te volgen. Ook in de rest van het traktaatje combineert hij de meetkundige constructies met rekenwerk met letters.

Tot slot

Voor Baudet was de tritmetische lijn zoiets als een uitstapje naar de speeltuin: het is nergens goed voor, maar het is gewoon leuk. Het moet wel serieus genomen worden, want zijn collega's oordeelden over zijn kunnen naar aanleiding van zijn publicaties. Ook een kind in een speeltuin wordt door andere kinderen bekeken en al dan niet als een aardig speelkameraadje beschouwd. Het grote verschil tussen Baudet en het kind in de speeltuin is het feit dat Baudet zich bewust was van de eeuwenoude traditie waarvan hij met zijn traktaatje deel uitmaakte.
Met oude spullen moet je voorzichtig wezen, maar het kan geweldig mooi speelgoed zijn. Met een verhaal als dat van de negentiende-eeuwse onderwijzer Baudet, de geschiedenis van de drie klassieke meetkunde-problemen en de pogingen om die op te lossen daar-achter, wordt het ook voor een grotere groep leerlingen toegankelijk.

Eerst in de jaren 80 van de 19de eeuw kon worden bewezen dat de drie klassieke problemen onoplosbaar waren. Daarvoor is echter een dosis wiskunde benodigd die we geen middelbare scholier aan zouden moeten doen. De klassieke meetkunde is relatief eenvoudig, en biedt aanknopingspunten voor leerlingen om mee aan de slag te gaan. Dat kan bij wijze van spreken al op de basisschool, maar bijvoorbeeld ook (of: juist!) in het kader van een praktische opdracht. Voor de B-leerling kan zo'n opdracht een meer wiskundige invulling krijgen, terwijl de A-leerling zich kan verdiepen in historisch materiaal. Leerlingen die *De Stelling van de Papegaai* [4] hebben gelezen, weten dat de klassieke meet-kundigen reeds rond 400 v. Chr. een drietal problemen hadden geformuleerd waarvan eerst eeuwen later kon worden aangetoond dat ze niet oplosbaar waren. In feite zijn zij zich bewust van hetgeen ook ten tijde van Baudet reeds tot ons collectieve geheugen behoorde.

Noten

Algemene informatie over de klassieke problemen is ruimschoots voorhanden, bijvoorbeeld op Internet in [2]. Ook het oude lesboek geschiedenis van wiskunde voor gymnasium-A leerlingen van Lucas Bunt [9] is nog immer de moeite waard. De drie klassieke problemen hebben tot een aantal heel leuke kromme lijnen gevoerd die (weliswaar tegen de spelregels in) de problemen oplosten, met name de cissoïde en de conchoïde. Deze lijnen staan ook op [2] besproken. Het besproken traktaatje van Baudet [8] is via [1] geheel elektronisch raadpleegbaar: de paragrafen 1, 2 en 6 zijn voor leerlingen leesbaar. De andere stukken zijn zonder meer te moeilijk. Achtergrondinformatie over Baudet treft men in [6], terwijl het wiskundeonderwijs van zijn tijd in [7] aan de orde komt.

[1] http://www-math.sci.kun.nl/math/werkgroepen/gmfw/bronnen/
[2] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/
[3] http://aleph0.clarku.edu:80/~djoyce/java/elements/
[4] Denis Guedj: De stelling van de papegaai, Ambo (Baarn, 1999)
[5] Jan Lenders: De burger en de volksschool, Nijmegen (1988)
[6] Danny Beckers: P.J. Baudet (1778-1858) en de didactiek van de wiskunde, in: Euclides 75 (nr. 2, oktober 1999), pp.39-46
[7] Harm Jan Smid: Een onbekookte Nieuwigheid?, DUP (Delft, 1997)
[8] P.J. Baudet: Korte Beschrijving eener Tritmetische lijn, Deventer (1834)
[9] L.N.H. Bunt: Van Ahmes tot Euclides, Groningen (1960)
[10] Ed de Moor: Euclides' moeilijkste eeuw, in: Euclides 76 (nr. 8, juni 2001), pp.290-302
[11] P.J. Baudet: Meetkundig Schoolboek, Deventer (1824)
[12] Gert Schubring: Die Entstehung des Mathematiklehrerberufs im 19. Jh, Weinheim (1991)

Over de auteur

Danny Beckers (e-mailadres: dbeckers@sci.kun.nl) is docent wiskunde aan de SG 'De Monnikskap' te Nijmegen en werkt aan een promotie aan de KUN, subfaculteit wiskunde (postbus 9010, 6500 GL Nijmegen).

Prof. Dr. O. BOTTEMA ERELID VAN WIMECOS

Door de algemene vergadering van Wimecos van 28 december 1961 werd aan Prof. Dr. O. Bottema het erelidmaatschap van Wimecos aangeboden. Voorzitter Dr. J. H. Wansink sprak het nieuwe erelid als volgt toe:

Prof. Bottema,

zo juist heeft de algemene vergadering van Wimecos besloten u het erelidmaatschap van onze vereniging aan te bieden. Voor ik u vraag, of u ons de eer aan wilt doen dit erelidmaatschap te aanvaarden, rust op mij de gaarne aanvaarde plicht kort uiteen te zetten, wat ons tot dit besluit heeft gebracht.

Van 1937—1941 was u bestuurslid van Wimecos. U hebt in deze jaren de financiën van onze vereniging beheerd. Uw benoeming tot hoogleraar te Delft in 1941 maakte aan deze relatie een einde. Maar dat betekende geenszins dat u na 1941 voor ons een vreemde bent geworden.

Uw belangstelling voor de Nederlandse wiskundeleraar en zijn werk is gebleven en u hebt aan deze belangstelling op een zeer bijzondere wijze uitdrukking weten te geven, met name in de lange reeks van korte bijdragen in Euclides, die ons onder de naam van „Verscheidenheden" allen bekend zijn. U hebt daarbij in 1961 het recordgetal van 50 weten te bereiken. Het is jammer dat niet alle aanwezigen nu reeds uw vijftigste nummer, een feestnummer fonkelend van mathematische humor, hebben kunnen lezen. Door een administratief misverstand is dit niet in het decembernummer van Euclides verschenen maar zal eerst in het volgend nummer van ons tijdschrift worden opgenomen[1]). Ook nummer 51 is middelerwijl reeds ter perse.

Van uw belangstelling en liefde voor het wiskunde-onderwijs in onze middelbare scholen getuigde uw oratie „de dienst der wiskunde", daarvan getuigen al uw bijdragen in ons tijdschrift. Van uw positieve waardering voor de onderwijsmethoden bij het v.h.m.o. getuigen uw geslaagde pogingen om het instituut der instructeurs in Delft ingang te doen vinden.

U beschouwt — en terecht — als meest waardevolle element in

[1]) blz. 131

de vorming van de leraar zijn opleiding tot vakmanschap, zich uitend in een volkomen beheersing van de door hem te onderwijzen leerstof, ingebed in een geheel van hogere dimensies, waarbij we dit laatste woord niet letterlijk dienen te interpreteren. Door al uw injecties hebt u steeds weer willen bijdragen tot een verruiming van blik en een verdieping van inzicht op het terrein van de schoolwiskunde zelf.

Uw lezing van straks zal niet de eerste zijn, die u voor ons, leraren, houdt.

Bijna een kwart eeuw geleden sprak u op een vergadering van Wimecos over „Maxima en minima bij vierhoeken met gegeven zijden" (Euclides, XV, 1 e.v.). Op het derde Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen hield u een lezing over „het wiskundig gedeelte van het eindexamen der H.B.S." Ook dit vinden we in Euclides opgenomen (Euclides XII, 284 e.v.).

Al deze geschriften — er zijn er nog meer, ik denk b.v. aan uw hoofdstukken uit de elementaire meetkunde, die in de Servire-reeks verschenen — zijn het lezen en herlezen voor ons, mensen uit de praktijk van het v.h.m.o., nog steeds de moeite waard.

Maar al deze geschriften zijn reeds van relatief oude datum. Waarom bieden we u dan op dit moment het erelidmaatschap aan?

Omdat u voor ons de verpersoonlijking bent van de band die er tussen de hoogleraar-wiskunde en de leraren-wiskunde moet bestaan. In Duitsland kennen we een tijdschrift: Zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität". Prof. Behnke staat hier o.a. achter. Wij cultiveren deze Zusammenhang niet op Duitse wijze. Maar we constateren wel met vreugde dat er in ons land tal van instanties zijn die zich voor de juiste samenwerking van school en universiteit inspannen. Vele hoogleraren wijden jaarlijks een deel van hun energie aan de poging om de leraren in functie een hernieuwde oriëntatie t.a.v. de ontwikkeling der wiskunde voorzover die voor het v.h.m.o. van wezenlijke betekenis is mogelijk te maken. U staat hier niet buiten zoals o.m. blijkt uit het feit dat u zowel deel uitmaakt van de Adviesraad voor de Wiskundige Olympiade als van de Adviescommissie voor de vakantiecursussen vanwege het Mathematische Centrum, waarnaar ik in mijn openingswoord heb verwezen.

Wij bieden u het erelidmaatschap van Wimecos aan, Prof. Bottema, omdat we daarmee tot uitdrukking willen brengen hoezeer we uw permanente activiteit voor de belangen van het wiskunde-onderwijs waarderen.

Dan rest me nog slechts de vraag: neemt u dit erelidmaatschap aan?

Uit: Euclides 37 (nr. 5, 1961-1962)

BIJZONDERE MECHANISMEN EN BIJNA RECHTE LIJNEN

Fragmenten uit de geschiedenis van de kinematica

[Hendrik Blauwendraat]

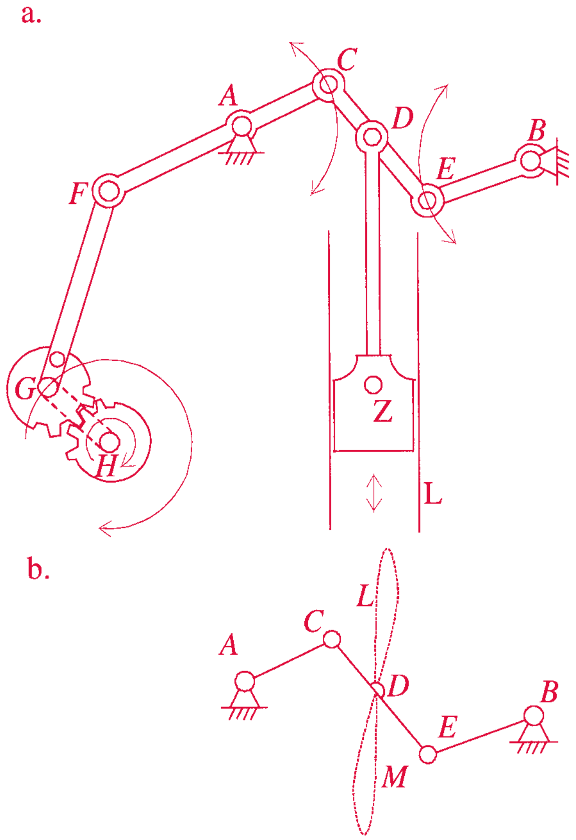
1. Inleiding

Tijdens zijn hoogleraarschap in Delft was Oene Bottema actief in het onderzoek in de kinematica; ruw gezegd is dat de meetkundige studie van beweging zonder haar oorzaken in beschouwing te nemen. In 1961 kwam Bottema in contact met Ferdinand Freudenstein van de Columbia University in New York. Freudenstein was een werktuigbouwkundige die werkte op het gebied van de kinematica van mechanismen. Dat contact tussen hen was uiterst vruchtbaar. Bottema was een begaafd specialist op het gebied van de traditionele meetkunde en de kinematica van mechanismen was een onderzoeksterrein waarop zijn expertise bij uitstek was toegesneden. Talloze bijdragen heeft hij op dat gebied geleverd. In de kringen van de International Federation for the Theory of Machines and Mechanisms (IFToMM) verwierf Bottema een grote naam. Hij werd benoemd tot erelid van die organisatie. Samen met een leerling van Freudenstein, Bernard Roth, hoogleraar aan de Stanford University in California, schreef Bottema het standaardwerk *Theoretical Kinematics* (1979), dat in 1990 in de Dover-reeks werd herdrukt.
Reden genoeg om in dit speciale nummer van *Euclides* een stuk op te nemen over kinematica. De kern van dit artikel wordt gevormd door een mooie stelling uit de kinematica van mechanismen: de stelling van Roberts, door Bottema in Delft jaar in jaar uit onderwezen aan ettelijke generaties werktuigbouwkundigen. De context is historisch.

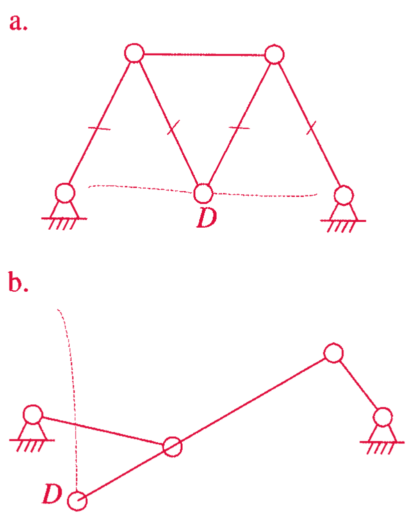
2. Rechte lijnen?

Aan het einde van de achttiende eeuw werd de stoommachine aanzienlijk verbeterd. Werk dat voorheen door mensen, dieren of molens moest worden uitgevoerd, kon nu gedaan worden door een machine die zijn kracht ontleende aan een door stoom aangedreven zuiger die op en neer bewoog in een cilinder.
Een probleem bij de toepassing van de stoommachine was dat deze beweging omgezet moest worden in een continu draaiende beweging van een as. Er werden veel mechanismen bedacht die deze omzetting gesmeerd konden laten verlopen. Een ervan was van James Watt (1736–1819). Hij bedacht in 1784 een oplossing die bestond uit een aantal stangen en scharnieren. Oplossingen met andere onderdelen brachten, zo bleek, in de praktijk toch veel problemen met zich mee. Daarbij kwam, dat er betaald moest worden voor het gebruik van andermans ideeën.
Een schets van een deel van de structuur van Watts machine staat in figuur 1a. De zuiger Z beweegt op en neer in cilinder L. Watt maakte aan het uiteinde D van de zuigerstang een starre stang CE vast. De uiteinden hiervan bevestigde hij aan twee balken AC en EB. Aan het verlengde van balk AC zat een mechanisme FGH. Hierin was een tandwiel bevestigd aan stang FG, en H was het middelpunt van een ander tandwiel, dat de gewenste continu draaiende beweging uitvoerde. Op die manier zette Watt de op en neer gaande beweging van D om in een continu draaiende in H.

FIGUUR 1 **De stoommachine van James Watt (a) en een abstracte weergave van zijn benaderende rechtgeleiding (b) die erin verwerkt is; *D* op stang *CE* is het punt dat bijna een rechte lijn (*LM*) volgt. De beweging is met pijlen aangegeven; *A*, *B* en *H* blijven op hun plaats.**



FIGUUR 2 **De benadering van Richard Roberts (a) en de 'sprinkhaan' van Evans (b). De lijnen stellen stangen voor en de bolletjes scharnieren. *D* is het punt dat de begeerde bijna-rechte lijn (gestippeld) beschrijft.**



Een belangrijke eis aan het mechanisme was dat *D* een rechte lijn moest volgen. Hoewel dit niet precies zo was, had Watt wel een goede benadering gevonden. De werking verklaarde hij als volgt (zie figuur 1b): omdat *AC* en *EB* vaste afstanden zijn, bewegen *C* en *E* langs cirkels die tegenovergesteld zijn in richting. De kromming van die cirkels wordt in punt *D* min of meer opgeheven, omdat *D* tussen *C* en *E* ligt [1]. Watt slaagde erin de afmetingen van de machine zo te kiezen, dat *D* inderdaad nauwelijks van een rechte afweek; hij had een zogenoemde *benaderende rechtgeleiding* gemaakt. Achteraf vond Watt zelfs dat dit zijn mooiste uitvinding was [2].
De benadering van Watt was in praktisch opzicht interessant, omdat ze zo nauwkeurig was. Ook wiskundigen hadden belangstelling. Met name enkele Fransen analyseerden de rechtgeleiding van Watt en haar beweging. Ze slaagden erin de vergelijking op te stellen van de kromme die door *D* beschreven wordt. Het bleek om een kromme van de zesde graad te gaan, die de vorm van een acht (8) heeft; een schets (gestippeld) van die kromme is te zien in figuur 1b.
Ook anderen probeerden dergelijke rechtgeleidingen te maken. In figuur 2 zijn twee voorbeelden abstract weergegeven; het zijn de machines van Oliver Evans (1755–1819) en Richard Roberts (1789–1864) [3]. Net als dat van Watt bestonden deze mechanismen uit stangen en scharnieren. Het was ook hier echter niet gelukt om met deze onderdelen een exacte rechtgeleiding te maken.

3. Peaucellier: een exacte oplossing

Om in stoommachines nu de afwijking van een rechte lijn zo klein mogelijk te maken, was het meestal noodzakelijk de mechanismen groot te maken. Vooral op schepen leverde dit problemen op: door de hoogte van de machines kwam het zwaartepunt van het schip ongunstig te liggen; de machines waren ook veel te zwaar [4]. De Franse officier bij de genietroepen Charles Nicolas Peaucellier (1832–1913) vond in 1864 een oplossing.
Dat blijkt uit een brief [5] die hij inzond in het blad voor kandidaten aan de technische en gewone hogescholen in Frankrijk. Hij daagde daarin de lezers uit om een rechtgeleiding te maken. De rechtgeleiding die hij in gedachten had, moest een bijzonder geval zijn van een door hem zo genoemde *compas composé* (samengestelde passer) en mocht alleen uit stangen en scharnieren bestaan. Het apparaat moest niet alleen in staat zijn exact een rechte lijn te genereren, maar ook cirkels met elke gewenste straal en kegelsneden. Zijn opgave trok nauwelijks aandacht, totdat in 1870 de Rus L. Lipkin (1846–1876) met precies hetzelfde mechanisme als dat van Peaucellier op een expositie verscheen.
Zes jaar later publiceerde Peaucellier een artikel [6] waarin stond hoe hij zijn mechanisme had gevonden. Hij was uitgegaan van de benaderende rechtgeleiding van Watt (zie figuur 1b). De vergelijking van de baan van *D* was van de zesde graad en van zo'n vorm, dat de kromme niet kon ontaarden in een rechte lijn en

een vijfdegraads deel. Peaucellier probeerde de graad van de kromme echter te verlagen om er zo wel een rechte lijn (een eerstegraads kromme) van te kunnen maken. Hij merkte daartoe op, dat bij een stand van stang AC twee standen van stang EB mogelijk zijn; de tweede mogelijke stand is met stippellijnen aangegeven in figuur 3. Peaucellier concludeerde dat de tweede stand (D') van D óók op genoemde zesdegraads kromme moest liggen. De truc die hij daarop bedacht, was dat hij met behulp van een ruit $CF'MF$ een punt M precies tussen D en D' aanbracht. Dat punt moest wel op een kromme van een lagere graad liggen, meende Peaucellier. Dit is nog waar ook: M beschrijft een vierdegraads kromme die kan ontaarden in een rechte lijn en een derdegraads deel – de afmetingen van de lijnstukken (of de stangen in het mechanisme) zijn dus zo te kiezen dat de baan van M, als C over een cirkel door B beweegt, precies een rechte lijn is. Een voorbeeld van die machine staat in figuur 4; de maten zijn zo dat $|AB| = |AC|$, $|BE| = |BE'|$, $|CE| = |CE'| = |EM| = |E'M|$. ($F$ en F' vallen respectievelijk met E en E' samen.)

De rechtgeleiding 'werkt' omdat configuratie $BECE'M$ aan C zijn *inverse punt M* toekent. De bedoelde inversie is ten opzichte van de zogenaamde grondcirkel (gestippeld in figuur 4) met middelpunt B en straal : het inverse punt M ligt op BC zó, dat $BC \cdot BM = r^2$. Omdat C een cirkel beschrijft die juist door het middelpunt B van de grondcirkel gaat, liggen de inverse punten M op een rechte loodrecht op lijn AB (zie bijvoorbeeld [Coxeter 1989], pp.77–83, met op p.81 een zeer elegant bewijs dat de inverse van een cirkel door het middelpunt van de grondcirkel een rechte is). Om deze reden wordt $BECE'M$ ook wel de *inversor van Peaucellier* genoemd.

4. De plagiograaf van Sylvester

In Groot-Brittannië hoorde de wiskundige James Joseph Sylvester (1814–1897) van de inversor, en die was er erg enthousiast over. Hij was zelfs zo enthousiast, dat hij zelf stangenmechanismen begon te onderzoeken en vond dat andere wiskundigen dat ook moesten doen. In 1874 hield Sylvester daarom een lezing voor de Royal Institution in Londen getiteld *On recent discoveries in mechanical conversion of motion* [7]. Hoofdonderwerp was de inversor van Peaucellier en allerhande toepassingen ervan. Er waren modellen van de inversor gemaakt en die werden gedemonstreerd. Sylvester wist hiermee de aandacht te trekken van jongere wiskundigen zoals Samuel Roberts (1827–1913), die ook mechanismen ging onderzoeken. Roberts kwam daarbij op het idee om niet alleen naar de stangen in het mechanisme te kijken, maar naar de bewegende vlakken die aan de stangen vast zaten. Hij slaagde erin de eerste bevredigende wiskundige behandeling van de banen van punten in een bewegend mechanisme te geven. Hieronder komt een stelling van hem aan de orde die over de baan van zo'n punt gaat. Hij bewees die met een eigenschap die Sylvester in 1875 publiceerde in *Nature* [8]. Het gaat om een generalisatie van de *pantograaf.*

Eigenschap (de plagiograaf van Sylvester):
Zij A_0CBA een parallellogram waarvan A_0 vast is (zie figuur 5). Laat verder op zijde BC een driehoek CRB geplaatst zijn met $\triangle RCB = \alpha$ en op zijde AB een driehoek ABQ zó dat $\triangle CRB$ en $\triangle ABQ$ gelijkvormig zijn. Laat R een bepaalde figuur k_R beschrijven. De baan k_Q van Q is dan gelijkvormig met k_R, en wel zo, dat k_Q uit k_R ontstaat door een rotatie om A_0 met hoek α en een vermenigvuldiging met factor $\lambda = \dfrac{|CB|}{|CR|}$.

Bewijs: Zij A_0CBA het gegeven parallellogram met de gelijkvormige driehoeken CRB en ABQ. We brengen C' aan zo dat $\triangle A_0CC'$ gelijkvormig is met $\triangle ABQ$, waarbij $\triangle C'A_0C = \alpha$. Merk op dat $CBQC'$ dan een parallellogram is. Ik toon aan dat $\triangle A_0CR$ in $\triangle A_0C'Q$ wordt overgevoerd door genoemde transformatie. Dat is voldoende.
Zij dan $\lambda = \dfrac{|CB|}{|CR|}$. Wegens gelijkvormigheid is λ tevens de verhouding tussen $|A_0C'|$ en $|A_0C|$; ook is de hoek tussen de lijnstukken A_0C en A_0C' gelijk aan α. Een rotatie om A_0 met hoek α gevolgd door een vermenigvuldiging met λ voert C dus over in C'. Om precies dezelfde reden wordt lijnstuk CR door een rotatie om C met hoek α en een vermenigvuldiging met factor λ afgebeeld op CB. Daar $CBQC'$ een parallellogram is, is de verhouding tussen $|C'Q|$ en $|CR|$ eveneens λ. $C'Q$ ontstaat dus uit CR door een rotatie om A_0 met hoek α en een vermenigvuldiging met λ, waarmee het gestelde bewezen is. □

Dat voorgaande eigenschap inderdaad een generalisatie van de pantograaf is, ziet men in door R op CB of het verlengde ervan te kiezen; de twee gelijkvormige driehoeken ontaarden in rechte lijnen. Zo verkrijgt men de gewone pantograaf.

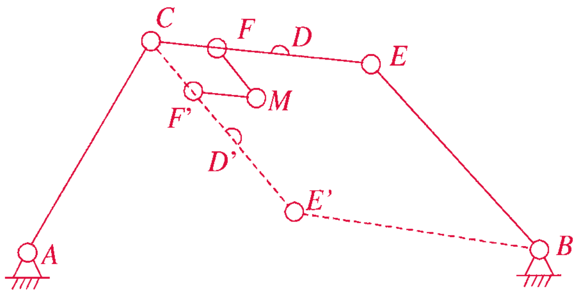
5. Een 'remarkable linkage'

Roberts gebruikte de *plagiograaf* bij het onderzoek van banen van bewegende punten in mechanismen. In figuur 6 staat een abstract mechanisme afgebeeld; A_0 en B_0 zijn punten vast op het vlak van tekening; driehoek ABC is beweegbaar aan deze punten verbonden. We zijn geïnteresseerd in de baan, de zogenoemde *koppelkromme*, van het punt C ten opzichte van het vlak van tekening.

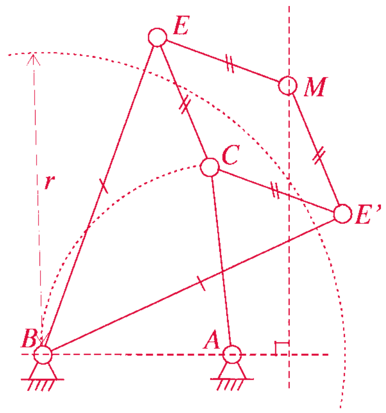
We passen de eigenschap van Sylvester toe op het afgebeelde mechanisme (zie figuur 6): we breiden de figuur uit met A_1, zodat A_0ACA_1 een parallellogram is. Verder bevestigen we op A_1C een driehoek $\triangle A_1CC_1$ die gelijkvormig is met $\triangle ABC$: nu hebben we precies een plagiograaf gemaakt. De zijden van $\triangle A_1CC_1$ hebben dan een verhouding r_1/c met die van $\triangle ABC$. De baan van C_1 is dan, op grond van de plagiograaf-eigenschap, gelijkvormig met de baan van B, die juist een cirkel is om B_0 met straal r_2 (de lengte van stang B_0B). Met andere woorden: C_1 beschrijft een cirkel. Laat C_0 het middelpunt van die cirkel zijn; dit blijft tijdens de beweging dus op z'n plaats! We kunnen zelfs bepalen wat de straal is: $|C_0C_1| = \dfrac{|AC|}{|AB|} r_2 = \dfrac{b}{c} r_2$.

Het middelpunt, C_0, ontstaat uit B_0 door een draaiing om A_0 onder een hoek $\alpha = \angle BAC$ en een vermenig-

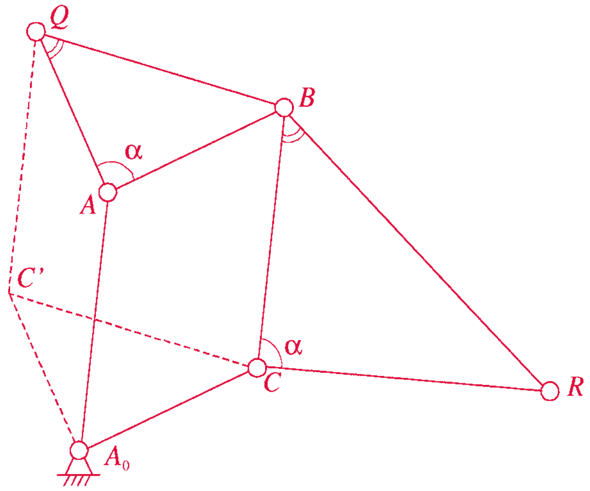
FIGUUR 3 Peaucellier ontwikkelt zijn rechtgeleiding.



FIGUUR 4 De rechtgeleiding van Peaucellier



FIGUUR 5 De plagiograaf van Sylvester



vuldiging met factor $\lambda_1 = b/c$. Het blijkt dus dat $\triangle A_0B_0C_0$ gelijkvormig is met $\triangle ABC$. De koppelkromme k_C die C beschrijft, kunnen we dus ook op een andere manier laten ontstaan, namelijk door A_0 en C_0 als gestelpunten (punten 'vast' op het vlak van tekening) te nemen en C in het vlak op A_1C_1 vast te zetten met stangen A_1C en C_1C.
Maar het zal de oplettende lezer niet ontgaan zijn, dat er aan de andere kant van het mechanisme ook zo'n parallellogram, B_0BCB_2, te plaatsen is (zie figuur 7) met bijbehorende driehoek CB_2C_2, zodat $\triangle CB_2C_2$ en $\triangle ABC$ gelijkvormig zijn; de verhouding van de overeenkomstige zijden is nu r_2/c. Geheel analoog aan bovenstaande redenering ziet men in dat C_2 eveneens een cirkel beschrijft, waarvan het middelpunt (dat we C_3 zullen noemen) uit A_0 ontstaat door een draaiing om B_0 over een hoek $\beta = \angle ABC$, gevolgd door een vermenigvuldiging met een factor $\lambda_2 = a/c$. Wederom is $\triangle A_0B_0C_3$ gelijkvormig met $\triangle ABC$. C_3 valt dus samen met het reeds gevonden punt C_0. We hebben dus een derde manier gevonden om k_C te laten ontstaan: C_0, B_0 als gestelpunten en C bevestigd aan B_2C_2.
We bepalen nu de maten van de vierhoek $C_1CC_2C_0$. Wegens gelijkvormigheid geldt: $|C_1C| = ar_1/c$ en $|CC_2| = br_2/c$. Zoals we reeds zagen, is $|C_0C_1| = br_2/c$. C_0C_2 is de straal van de cirkel die uit de baan van A ontstaat; die straal is $\lambda_2 r_1 = ar_1/c$. Het blijkt dat $C_1CC_2C_0$ een parallellogram is [9]. We hebben nu bewezen:

Stelling (de stelling van Roberts): *Zij $\triangle ABC$ een driehoek door stangen verbonden aan de punten A_0 en B_0. Zij $\triangle A_1CC_1$ zó dat A_0ACA_1 een parallellogram is en dat $\triangle A_1CC_1$ en $\triangle ABC$ gelijkvormig zijn. Dan is er een vast punt C_0 zodat de baan k_C van C ook wordt voortgebracht door de driehoek $\triangle A_1CC_1$, bevestigd aan de gestelpunten A_0 en C_0 met stangen A_0A_1 en C_0C_1. Analoog kan een driehoek $\triangle CB_2C_2$ worden geconstrueerd zo dat B_0B_2CB een parallellogram is en dat $\triangle CB_2C_2$ en $\triangle ABC$ gelijkvormig zijn. De koppelkromme wordt dan eveneens voortgebracht door $\triangle CB_2C_2$, bevestigd aan de punten B_0 en C_0. Zelfs geldt dat $C_1CC_2C_0$ een parallellogram is.*

Het mechanisme heeft dus een drievoudige symmetrie; op drie verschillende manieren kan men k_C laten ontstaan. We noemen dit mechanisme de *configuratie van Roberts*, naar haar ontdekker. Deze publiceerde zijn vinding in 1875 en noemde het 'a remarkable linkage' [10], een opmerkelijk mechanisme. De baan van C is immers een ééndimensionale kromme, heeft één vrijheidsgraad. Het toevoegen van het eerste parallellogram A_0ACA_1 en de gelijkvormige driehoek A_1CC_1 verandert daar niets aan, maar stang C_1C_0 kan roet in het eten gooien en het mechanisme laten vastlopen, omdat C_0 niet mag bewegen. De stelling van Roberts houdt echter in dat, als het mechanisme de juiste afmetingen heeft, het precies niet vastloopt. Een andere bijzonderheid is dat de koppelkromme een drievoudige symmetrie heeft, wat de analyse ervan verheldert.

6. Rechtgeleidingen met Roberts: terug naar af

De stelling van Roberts over de drievoudige voortbrenging van de koppelkromme lijkt op het eerste gezicht niets te maken te hebben met de bijna-rechtlijnige mechanismen die we al zagen. Het blijkt echter dat deze stelling ook die mechanismen in een nieuw daglicht zet. A.E. Richard de Jonge publiceerde in 1960 een artikel [11] waarin hij met behulp van de stelling van Roberts een classificatie van deze mechanismen maakt. Hij beschouwt daartoe een aantal limietgevallen van de stelling: zo vervangt hij sommige scharnieren door geleiders en laat hij de koppeldriehoek (dat is $\triangle ABC$) ontaarden in een lijnstuk.

Met de laatste ontaarding is redelijk eenvoudig in te zien dat het mechanisme van Watt uit figuur 1b precies dezelfde bijna-rechte kromme voortbrengt als de 'sprinkhaan' van Evans van figuur 2b. Dit gaat als volgt in z'n werk. Bij de configuratie van Roberts construeren we bij een gegeven mechanisme A_0B_0ABC (zie figuur 7) twee andere geconjugeerde mechanismen die precies dezelfde koppelkromme voortbrengen. Laten we nu delen van de configuratie ontaarden, zoals bijna het geval is in figuur 8, dan gaat de stelling nog door en kunnen we bij een algemener mechanisme nog twee andere construeren die dezelfde koppelkromme voortbrengen.

In figuur 8 zien we een bijna-ontaarding van de configuratie van Roberts (voor de overzichtelijkheid heb ik de scharnieren en het linker geconjugeerde mechanisme weggelaten). Driehoek ABC is bijna een lijnstuk, waardoor mechanisme A_0B_0ABC, met dikke lijnen weergegeven, veel op het mechanisme van Watt lijkt; in iets dunnere lijnen het rechter geconjugeerde mechanisme $B_0C_0CB_2C_2$. Men kan zich wel voorstellen dat laatstgenoemd mechanisme overgaat in de sprinkhaan van Evans, naarmate driehoek ABC 'platter' wordt: C_0 komt op A_0B_0 te liggen en driehoeken ABC en CC_2B_2 worden rechte lijnen. Zo wordt zichtbaar dat de rechtgeleidingen van Watt en Evans precies dezelfde kromme voortbrengen.

7. Tot slot

Hierboven is een aantal voorbeelden gegeven van de meetkundige analyse van mechanismen. De intrede van de computer heeft de meetkunde als belangrijkste instrument voor dit onderzoek achterhaald. Daarbij komt nog, dat nu veel meer ruimtelijke mechanismen worden onderzocht. Een voorbeeld van recente literatuur op dat gebied is het boek van McCarthy [2000].

Het meetkundeprogramma CABRI is een handzaam werktuig voor onderzoek en simulatie. Voorbeelden hiervan zijn te vinden op de webpagina's *http://www.pandd.demon.nl/peaucel.htm* en *http://www.pandd.demon.nl/rotaties.htm#4*.

Met dank aan Teun Koetsier en Wim Groen voor de hulp bij het schrijven en het lezen van de concepten.

Referenties

[Cardinaal 1914] Leerboek der Kinematika, J. Cardinaal. Delft: Technische Boekhandel en Drukkerij J. Waltman Jr (1914).

[McCarthy 2000] Geometric design of linkages, J. Michael McCarthy. New York etc.: Springer (2000).

[Coxeter 1989] Introduction to geometry, H.S.M. Coxeter. New York etc.: John Wiley & Sons, Inc. (1989).

[Ferguson 1960] 'Kinematics of mechanisms from the time of Watt', E.S. Ferguson. United States National Museum Bulletin 228: Contributions from the museum of history and technology. Paper 27 (1960), pp. 185–230.

[Koetsier 1983a] 'A contribution to the history of kinematics–I. Watt's straight-line linkages and the early French contributions to the theory of the planar 4-bar coupler curve', T. Koetsier. Mechanism and Machine Theory 18-1 (1983), pp. 38–42.

[Koetsier 1983b] 'A contribution to the history of kinematics–II. The work of English mathematicians on linkages during the period 1869–1878', T. Koetsier. Mechanism and Machine Theory 18-1 (1983), pp. 43–48.

[Peaucellier 1864] 'Lettre de M. Peaucellier, capitaine du Génie (à Nice)', C.N. Peaucellier. Nouvelles Annales de Mathématiques. Journal des Candidats aux Écoles Polytechnique et Normale. (2me série) 3 (1864), pp. 414–415.

[Paucellier 1873a] 'Note sur un balancier articulé à mouvement rectiligne', C.N. Peaucellier. Journal de Physique (1872–1873), pp. 388–390.

[Peaucellier 1873b] 'Note sur une question de géométrie de compas', C.N. Peaucellier. Nouvelles Annales de Mathématiques. (2me série) 12 (1873), pp. 71–78.

[Peaucellier 1876] 'Note sur l'emploi des systèmes articulés à liaison complète, en géométrie, en mécanique et dans les sciences appliquées', C.N. Peaucellier. Mémorial de l'Officier du Génie 25 (1876), pp. 369–389.

[Richard de Jonge 1960] 'The correlation of hinged four-bar straight-line motion devices by means of the Roberts Theorem and a new proof of the latter', A.E. Richard de Jonge. Annals of the New York Academy of Sciences 84 (1960), pp. 77–145.

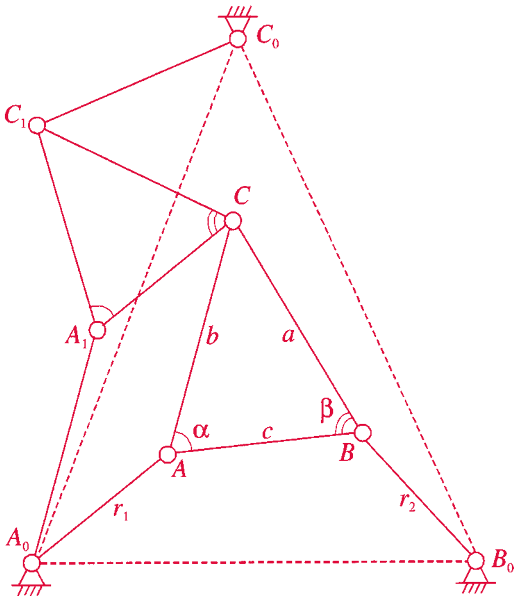
[Roberts 1875] 'On Three-bar Motion in Plane Space', S. Roberts. Proceedings of the London Mathematical Society VII (1875), pp. 14–23.

[Sylvester 1875a] 'On recent discoveries in mechanical conversion of motion', J.J. Sylvester. Proceedings of the Royal Institution of Great Britain VII (1873–1875), pp. 179–198. Gebruikt is de herdruk in The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester (Vol. III). New York, N.Y.: Chelsea Publishing Company (1973), pp. 8–25.

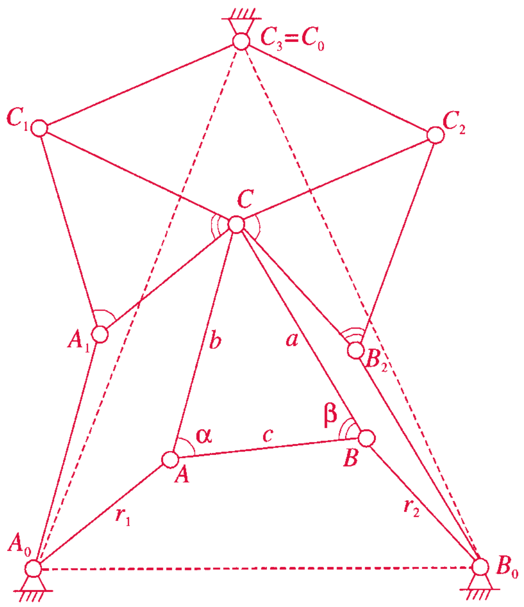
[Sylvester 1875b] 'On the plagiograph aliter the skew pantigraph', J.J. Sylvester. Nature XII (1875), pp. 168, 214–216. Gebruikt is de herdruk in The collected mathematical papers of James Joseph Sylvester (Vol. III). New York, N.Y.: Chelsea Publishing Company, 1973, pp. 26–34.

[Veldkamp 1987] 'Oene Bottema: A Biographical Sketch', G.R. Veldkamp. Nieuw Archief voor Wiskunde (4) 5-3 (1987), pp. 249–276 (met een bibliografie).

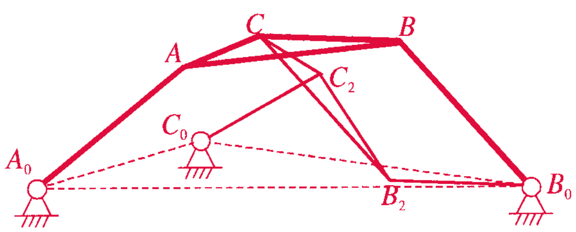
FIGUUR 6 **De configuratie van Roberts (linkerzijde). Herinner dat de lengte van de stangen vast is.**



FIGUUR 7 **De volledige configuratie van Roberts**



FIGUUR 8 **Bijna Watt en Evans ...**



Noten

[1] "forming certain combinations of levers, moving upon centres, wherein the deviation from straight lines of the moving end of some of these levers is compensated by similar deviations, but in the opposite directions, of one end of other levers"; Watt geciteerd in [Koetsier 1983a], p. 37

[2] [Koetsier 1983a], p. 38

[3] Peaucellier noemt deze ernstige tekortkomingen ([Peaucellier 1873a], p. 389). Zij treden op "notamment dans la navigation à vapeur, où l'on a intérêt à employer des machines de faible hauteur, peu pesantes et, par suite, à court balancier; mais, en opposition avec cette dernière condition, il faut encore que l'on admette de très grandes courses de piston, la vapeur devant travailler à longue détente."

[4] In [Ferguson 1962], pp. 199–209 en [Richard de Jonge 1960], pp. 78–94 zijn nog veel meer benaderende en exacte rechtgeleidingen te vinden.

[5] [Peaucellier 1864]

[6] [Peaucellier 1876]. De besproken overwegingen staan op pp. 374–378.

[7] [Sylvester 1875a]

[8] [Sylvester 1875b].

[9] Dit is niet geheel triviaal; het zou immers nog zo kunnen zijn dat C_0 en C 'aan dezelfde kant' van het lijnstuk C_1C_2 liggen. Dan is van een parallellogram in het geheel geen sprake. Dat dit echter niet zo is, wordt gegarandeerd doordat C_0C_1 en CC_2 evenwijdig zijn.
Ik toon dat aan in de geest van het bewijs van het plagiograaf-beginsel (zie figuur 7). CC_2 maakt een hoek α met CB_2. Dat C_1C_0 dezelfde hoek met CB_2 maakt, ziet men in doordat de hele driehoek $A_0C_0C_1$ uit A_0B_0B ontstaat door een rotatie om A_0 met hoek α en een vermenigvuldiging met l1. De hoek tussen C_1C_0 en BB_0 (en het daarmee evenwijdige lijnstuk CB_2) is dus α. Daar C_1C_0 en CC_2 eenzelfde hoek met dezelfde lijn maken, zijn ze evenwijdig.

[10] [Roberts 1875], p. 18

[11] [Richard de Jonge 1960]. Hij beweert in de titel dat zijn bewijs van de stelling van Roberts nieuw is. De oplettende lezer zal echter opmerken dat het ruwweg op hetzelfde neerkomt als het bewijs dat Cardinaal, hoogleraar in Delft aan het begin van de twintigste eeuw, geeft op pp. 162–163 van [Cardinaal 1914].

Over de auteur

Hendrik Blauwendraat is sinds 1 september 2001 als OiO geschiedenis van de wiskunde aan de Vrije Universiteit verbonden en onderzoekt de geschiedenis van de kinematica van mechanismen vanaf 1800, zich concentrerend op de werken van Ludwig Burmester en Franz Reuleaux en hun receptie.
Postadres: drs. H. Blauwendraat, Divisie Wiskunde en Informatica, De Boelelaan 1081a, 1081 HV Amsterdam.
E-mailadres: hblauwe@cs.vu.nl

TIEN PUNTEN OP ÉÉN CIRKEL

[Aad Goddijn]

1. Een examenopgave uit 1997

Het onderzoekspad van deze bijdrage begint bij een opgave uit het eerste experimentele examen wiskunde B2 vwo van 1997. Op een kleine verandering in de notatie na luidde die:

Op de zijden van driehoek ABC liggen de punten P, Q, R. De punten A, P, R bepalen een cirkel γ_a en de punten B, Q, P bepalen een cirkel γ_b. Deze twee cirkels snijden elkaar binnen de driehoek in een punt S (zie figuur 1).
De punten C, R, Q bepalen een cirkel γ_c.
Bewijs dat ook cirkel γ_c door punt S gaat.

Bij de ligging van figuur 1 volstaat een kort bewijs. Teken de lijnstukken *PS*, *QS* en *RS*. De vierhoeken *APSR* en *BQSP* zijn koordenvierhoeken. Dus gelden $\angle PSR + \angle RAP = 180$ en $\angle QSP + \angle PBQ = 180°$.
Gebruikmakend van $\angle PSR + \angle RSQ + \angle QSP = 360°$ en $\angle RAP + \angle PBQ + \angle QCR = 180°$ vinden we uiteindelijk $\angle RSQ + \angle QCR = 180°$. Daaruit volgt dat *CRSQ* een koordenvierhoek is.
Anders gezegd: *S* ligt op de cirkel door *C*, *R* en *Q*, hetgeen te bewijzen was.

2. De stelling van Miquel

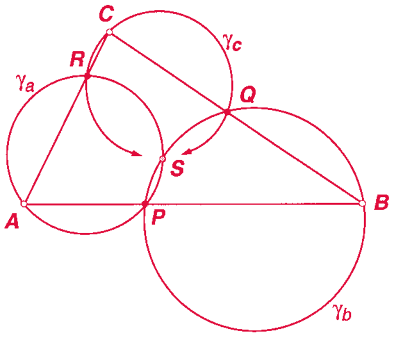
In figuur 2a en figuur 2b zijn twee andere liggingen getekend. Eén waarbij het de punten *P, Q, R* wél op de *zijden* van de driehoek liggen, maar *S buiten* de driehoek valt, en één waarbij *R* wél op de *lijn AC* ligt, maar níet op de *zijde AC*. In beide gevallen lijkt *S* toch op de cirkel door *C*, *R* en *Q* te liggen. Maar het is duidelijk dat bovenstaand bewijs niet zonder meer werkt. *BQSP* is in deze voorbeelden geen normale koordenvierhoek, de puntenvolgorde is niet geschikt. Toch willen we voor het vervolg uit kunnen gaan van de

Stelling van Miquel (ongeveer 1840)
Gegeven een driehoek ABC en drie punten op P, Q en R op de lijnen AB, BC en CA; P, Q en R niet samenvallend met een van de punten A, B en C. Dan gaan de drie cirkels γ_a, γ_b en γ_c die respectievelijk gaan
door A, P en R,
door B, Q en P,
door C, R en Q
door één gemeenschappelijk punt S.

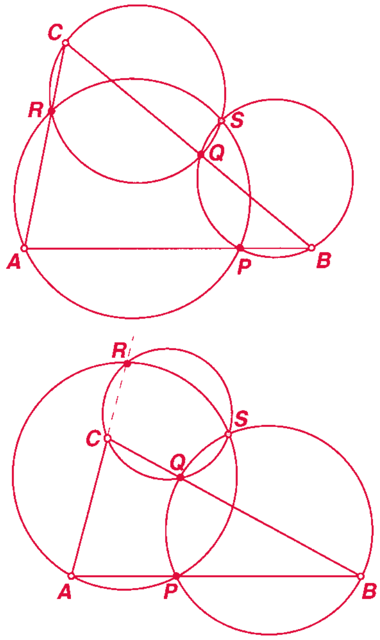
De grotere vrijheid voor de punten *P*, *Q* en *R* is het belangrijkste verschil, maar er is nog een lelijke smet op de examenopgave die we hebben weten te wissen. Punt *S* wordt geheel bepaald wordt door de ligging van *P*, *Q* en *R* op de lijnen (of lijnstukken) *AB*, *BC* en *CA* en het is vreemd dat punt *S* in de opgave ook nog aan een eigen voorwaarde moet voldoen, terwijl voor *S* bij gegeven *P*, *Q* en *R* geen keus mogelijk is.

3. Gerichte hoeken

Op (minstens) twee manieren kunnen we ons van de juistheid van de stelling van Miquel verzekeren.
Als eerste: het is mogelijk door uitvoerige gevalsonderscheiding alle mogelijke liggingen te beschouwen en bij elke ligging een aangepaste variant van het examen-bewijs te geven. De aanpassingen bestaan er in dat af en toe de stelling van de constante hoek op de boog moet worden gesubstitueerd voor de stelling van de koordenvierhoek; men bewijze bijvoorbeeld zelf het geval van figuur 2a. Fraai is die weg niet, want er gebeurt dan vele malen bijna hetzelfde; maar het kán.
De tweede manier: neem het gereedschap dat in de bewijzen van alle varianten gebruikt wordt, nader onder de loep. Dat gereedschap is het begrip hoek in combinatie met de stelling van de koordenvierhoek of de stelling van de constante omtrekshoek. Geprobeerd



FIGUUR 1 Een opgave uit 1997

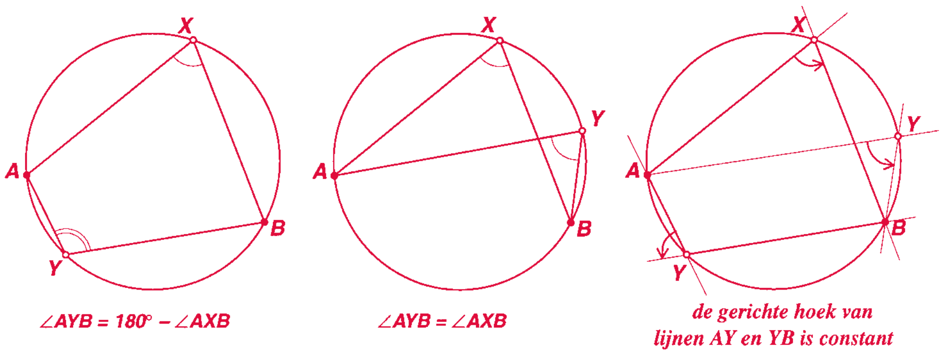


FIGUREN 2A, 2B Andere liggingen

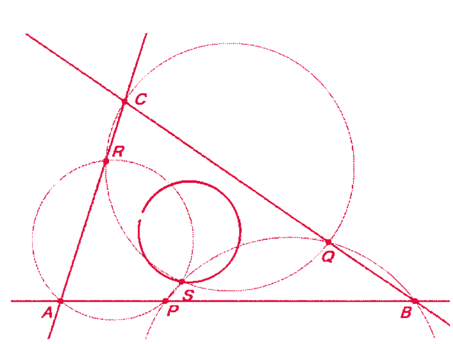
kan worden het begrip hoek zodanig te herdefiniëren dat de afzonderlijke twee stellingen in één stelling opgaan. Het resultaat is dan, dat we met één bewijs alle gevallen dekken. Dit idee wordt nu nader toegelicht.
De kern van dit gevalsonderscheidingsprobleem en de unificatie ervan is te zien in de figuren 3a, 3b, 3c. A, B en X zijn hier steeds vaste punten op de gegeven cirkel, Y vatten we op als variabel. In de eerste twee figuren zien we dat $\angle AYB$ afhangt van de gekozen boog waarop Y ligt; eerst is $AYBX$ een 'normale' koordenvierhoek en kunnen we de stelling toepassen die zegt dat overstaande hoeken in een koordenvierhoek samen 180° zijn. In het volgende geval zien we een vlinderachtige figuur $AYBX$ en wordt de zogenoemde stelling van de constante hoek op de boog toegepast om $\angle AYB$ te bepalen (zie de bijschriften bij de figuren).
In de derde figuur, die de eerdere twee in zich verenigt, kijken we op een ander manier tegen de hoeken aan. We kijken hoe de lijn AY om Y tegenkloks geroteerd moet worden om op lijn BY terecht te komen. Dat bepaalt een tegenklokse draaihoek in het interval [0, 180°). Die draaihoek blijkt nu wél steeds dezelfde te zijn, waar Y ook maar op de cirkel ligt. (Als Y samenvalt met A of B moeten we de raaklijn in A of B nemen.) Deze draaihoek heeft richting; de draaiing van AY tegenkloks naar YB is een andere dan de draaiing van YB naar AY. We noemen deze draaihoek *de gerichte hoek van de lijnen AY en YB*. De vereniging van de beide traditionele stellingen is in het onderschrift bij figuur 3c kort aangegeven.
Door in plaats van met traditionele hoeken met deze gerichte hoeken te werken kunnen we het bewijs bij de examenopgave nu eenvoudig herschrijven, zodat het wel alle gevallen van de stelling van Miquel dekt. We voeren dit en de noodzakelijke verfijnde vastlegging van de theorie van de gerichte hoeken niet in detail uit. De rest van dit artikel is geschreven in de taal van gewone hoeken, maar het is zo gedaan dat het direct in de taal van gerichte hoeken herschreven zou kunnen worden. Vandaar dat alle gevalsonderscheidingen zijn weggelaten; de herschrijving middels gerichte hoeken zou alle bewijzen volledig kunnen maken. De consequentie is wel, dat we niet de korte notatie $\angle Y$ kunnen gebruiken, maar volledig $\angle AYB$ moeten schrijven, omdat de richting van de hoeken van belang is. Anders gezegd: de soep der gerichte hoeken wordt in de praktijk minder heet gegeten dan hij zojuist is opgediend.

4. Beweging

In het voorgaande zijn betere fundamenten ónder de stelling van Miquel aangegeven; nu gaan we óp de stelling iets nieuws bouwen. We doen dat door P, Q en R te laten bewegen. Er zijn erg veel mogelijkheden maar we beperken de zaken door P, Q en R van hun onafhankelijkheid te beroven, namelijk door hun bewegingen over de lijnen AB, BC en CA aan elkaar te koppelen; S zal dan afhankelijk van de gezamenlijke beweging van het drietal een baan gaan beschrijven. Redelijk voor de hand liggend is het om de posities van de drie punten op hun eigen lijn 'relatief hetzelfde' te nemen; we kijken dan naar de drietallen waarvoor de verhoudingen
$AP : PB$, $BQ : QC$ en $CR : RA$
aan elkaar zijn gelijk en we noemen P, Q, R in zo'n geval ook maar een *evenredig delend drietal*.
Sprekender kan dit in bewegingstaal geformuleerd worden: P, Q en R bewegen ieder met een eigen constante snelheid over hun eigen lijn, maar zo, dat in de tijd dat P van A naar B loopt, Q juist van B naar C loopt en R van C naar A.
We voegen nog de drie Miquelcirkels γ_a, γ_b, γ_c toe; die bewegen dan ook en we zijn uiteraard benieuwd naar de baan van het Miquelpunt S. Deze baan kan een



FIGUREN 3A, 3B, 3C **Gerichte hoeken**



FIGUUR 4 **De baan van S**

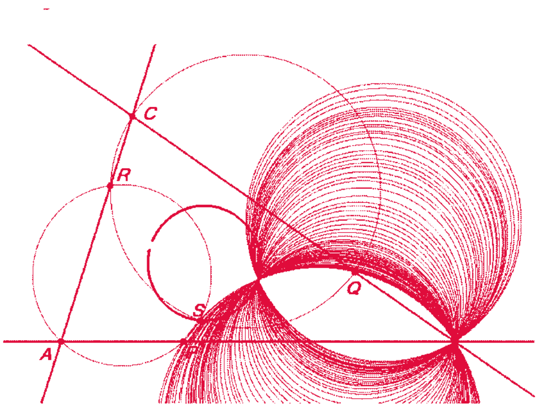
dynamisch meetkundeprogramma als CABRI ons snel laten zien; zo'n programma daagt onderzoek als dit erg uit (zie de schermafdruk in figuur 4).
De baan van S blijkt heel verrassend een cirkel met een gaatje te zijn.
Schuiven aan P, waarbij Q en R evenredig delend meegesleept worden, doet S over de cirkel bewegen, maar de cirkel als geheel blijft liggen. De cirkel bevat immers het totaal van de mogelijke S-posities.
Verslepen van A, B en C heeft wél effect; CABRI laat dan de *baan* van S mee veranderen; deze blijft tot onze voortdurende verbazing steeds een cirkel met een gaatje.

5. Zoeken naar een bewijs

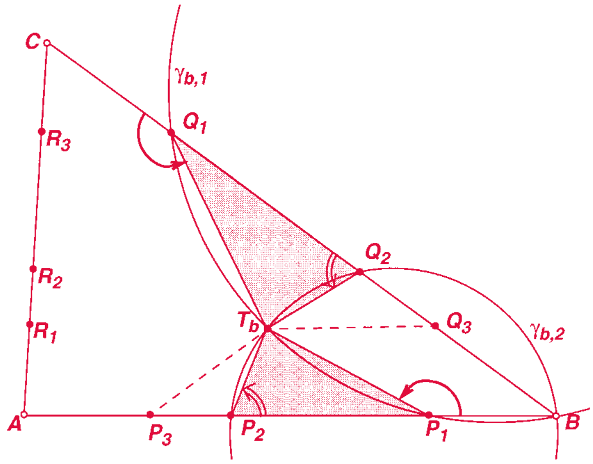
CABRI toont ons dit mooie fenomeen, maar CABRI bewijst niets. Het zoeken naar een bewijs moeten we zelf doen. In dit geval is dat niet gemakkelijk: de ontstane cirkel zweeft namelijk zo los van de driehoek. Als je niet al weet welke speciale cirkel dit is, sta je voorlopig met lege handen.
In deze situatie komen drie bewegende cirkels voor. Dat is een complexe beweging. Zou het iets op leveren als we eerst de beweging van één cirkel onderzoeken? Misschien vinden we iets waar we verder mee kunnen en dat zou dan een eerste tussenstation in de bewijsgang kunnen zijn.
CABRI kan ons weer helpen; we willen nu niet de baan van S zien, maar de *baan* van bijvoorbeeld de cirkel γ_b die door B, P en Q gaat. We willen dus het drietal P-Q-R laten bewegen en op een serie momenten even cirkel γ_b tekenen. In figuur 5 is het verrassende schermresultaat afgedrukt.
Kijk eens aan, al die verschillende exemplaren van cirkel γ_b lijken behalve door B nog door een ander vast punt te gaan. Dat punt lijkt bovendien ook op de baan van S te liggen.
Dit geeft veel vertrouwen in de bewijstoekomst, want:
a. Het bestaan van dat punt hangt samen met de beweging van slechts één cirkel; dit is dus waarschijnlijk 'eenvoudiger' aan te tonen dan de cirkelvorm van de baan van S.
b. Als het bewuste punt er echt is, zullen er voor de cirkels γ_a en γ_c ook zulke stabiele punten te vinden zijn. We kunnen dan proberen te bewijzen dat S ligt op de cirkel die door die drie punten gaat.
CABRI leverde ons geen bewijs, maar door het experimenteren hebben we wel een veelbelovend bewijsplan gevonden dat uit twee overzichtelijke stappen bestaat.

6. Bewijsstap 1: het tweede vast punt van de cirkels γ_b

Bij twee evenredig delende drietallen, zeg P_1, Q_1, R_1 en P_2, Q_2, R_2 horen twee van de door B gaande Miquelcirkels, in figuur 6 aangegeven met $\gamma_{b,1}$ en $\gamma_{b,2}$. Hun tweede snijpunt noemen we T_b. Aangetoond moet nu worden dat een willekeurige *derde* cirkel $\gamma_{b,3}$, horend bij een derde evenredig delend drietal (zeg P_3, Q_3, R_3) ook door T_b gaat (zie figuur 6).
Omdat T_b op de cirkel $\gamma_{b,1}$ ligt, geldt $\angle BP_1T_b = \angle CQ_1T_b$, want BQ_1T_bP is een koordenvierhoek. Evenzo geldt $\angle BP_2T_b = \angle CQ_2T_b$ en de driehoeken $P_2T_bP_1$ en $Q_2T_bQ_1$ zijn dus gelijkvormig.
Uit het evenredig delen van de P- en Q-punten volgt dat verder $P_1P_2 : P_1P_3 = Q_1Q_2 : Q_1Q_3$. We hebben op grond van de zojuist bewezen gelijkvormigheid echter ook $P_1P_2 : P_1T_b = Q_1Q_2 : Q_1T_b$ en leiden uit deze beide samen af dat $P_1P_3 : P_1T_b = Q_1Q_3 : Q_1T_b$, waarvan de hoekgelijkheid $\angle BP_3T_b = \angle CQ_3T_b$ weer een gevolg is.
Deze hoekgelijkheid vertelt ons tot slot dat $BP_3T_bQ_3$ een koordenvierhoek is. Daarmee is bewezen dat de derde, en dus elke γ_b-cirkel, door dit ene punt T_b gaat.
Opmerkelijk is dat we hier niet aan het begin van het bewijs een punt hebben vastgelegd met een of andere speciale eigenschap, om dan met behulp van die



FIGUUR 5 Nog een vast punt voor de γ_b's



FIGUUR 6 Bewijs voor bestaan van punt T_b

eigenschap af te leiden dat het punt op elke cirkel γ_b ligt; de bewijsgang was veel platter. Zo'n eigenschap is er nu overigens wel:
T_b is het centrum van de draaivermenigvuldiging die A op B en B op C afbeeldt.
In het bijzonder volgt dat ABT_b en BCT_b gelijkvormig zijn en daaruit weer dat de afstanden van T_b tot de zijden AB en BC zich verhouden als $AB : BC$.

7. Bewijsstap 2: van de T-punten naar de baan van S

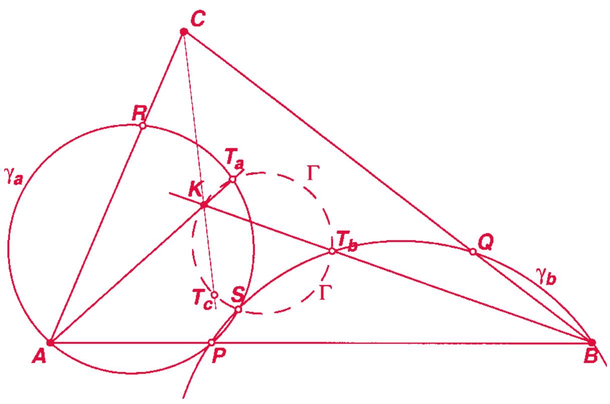
Behalve het vaste punt T_b hebben we uiteraard ook het vaste punt T_a (en eventueel T_c) ter beschikking. In figuur 7 zijn deze punten aangegeven en is ook het snijpunt K van BT_b en AT_a getekend. Dat de cirkel door T_a, T_b en K (die onafhankelijk zijn van het in principe variabele drietal P, Q, R) door het snijpunt van S van γ_b en γ_a gaat, volgt nu direct uit toepassen van de stelling van Miquel op driehoek ABK met de deelpunten P, T_b en T_a.
We hebben nu bewezen dat het Miquelpunt S van het evenredig delende drietal P, Q, R op de vaste cirkel ligt, die door K, T_a en T_b gaat. Laten we deze vaste cirkel het label Γ geven.

8. Een tweede bijzonder drietal op Γ

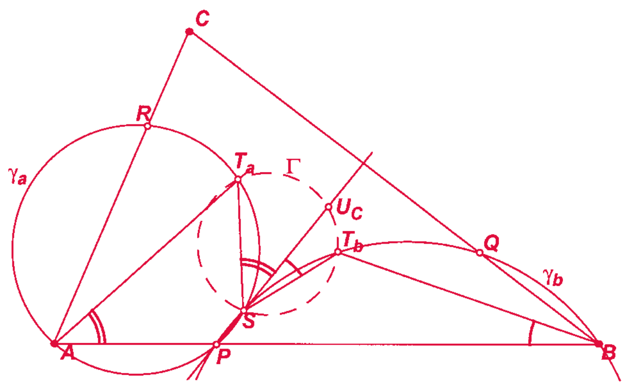
Het in het begin van de vorige paragraaf gegeven bewijs is niet moeilijk te begrijpen, maar komt wat uit de lucht vallen, in tegenstelling tot het eerdere bewijs van het bestaan van het vaste punt T_b.
Een directer bewijs is ook mogelijk, en zoals vaak het geval is, werpt een andere bewijs ook weer een ander licht op de zaken. Bewijzen doen immers meer dan ons van te bewijzen stellingen overtuigen, ze laten ons samenhangen zien.
Het idee achter figuur 8 is te bewijzen dat $\angle T_bST_a$ constant is door deze hoek met behulp van de doorgetrokken lijn PS in tweeën te splitsen en de delen elders als vaste hoeken in de figuur aan te wijzen. In de figuur is dat middels kleine boogjes gedaan; uiteraard spelen de cirkels γ_b en γ_a hun bekende rol in het bewijs. We vinden $\angle T_bST_a = \angle T_bBP + \angle PAT_a$. De hoeken in het rechterlid van deze gelijkheid zijn vast en dus is $\angle T_bST_a$ ook vast. Dus ligt S op een vaste cirkel.
Nu het extra inzicht dat dit bewijs ons levert.
Laat U het tweede snijpunt van PS met Γ zijn; T_bSU is constant en daarom is U een vast punt van Γ. Er zijn nog twee van die punten, bij elke gekozen driehoekszijde hoort er een. Naast het drietal $T_{a,}$ $T_{b,}$ T_c hebben we zo drie nieuwe bijzondere punten op gevonden, die we verder met U_a, U_b, U_c zullen aanduiden.

9. Wélke punten van de cirkel Γ kunnen als Miquelpunt optreden?

Als S een punt van Γ is dat niet gelijk is aan K (zie figuur 7), kunnen we de cirkel γ_b door B, T_b en S tekenen en vinden we een geschikt stel P en Q als snijpunten van de cirkel met de zijden AB en BC; dat is makkelijk na te gaan. We hebben bewezen: de baan van S is de vaste cirkel Γ minus het punt K. (Het geval $S = T_b$ is niet problematisch; uitwijken naar de cirkel γ_a door T_a, T_b en A is mogelijk.)
Uitgaande van punt S op Γ kunnen we nu nog op een andere manier P, Q en R vinden, namelijk door U_cS, U_aS en U_bS te snijden met respectievelijk AB, BC en CA (zie bijvoorbeeld figuur 7 voor snijden van US met AB). Van de gevonden P, Q en R moet weer bewezen worden dat ze een evenredig drietal vormen. Het is een goede oefening om vast te stellen dat de voorgaande bewijzen 'achteruit' doorgewandeld kunnen worden.
Uiteraard mag ook nu S niet gelijk aan het eerder gevonden punt K zijn; men kan hieruit overigens direct afleiden dat (bijvoorbeeld) KU_c evenwijdig is aan AB!



FIGUUR 7 ***S*** **ligt op een vaste cirkel**



FIGUUR 8 Alternatief bewijs; extra: U_c is vast

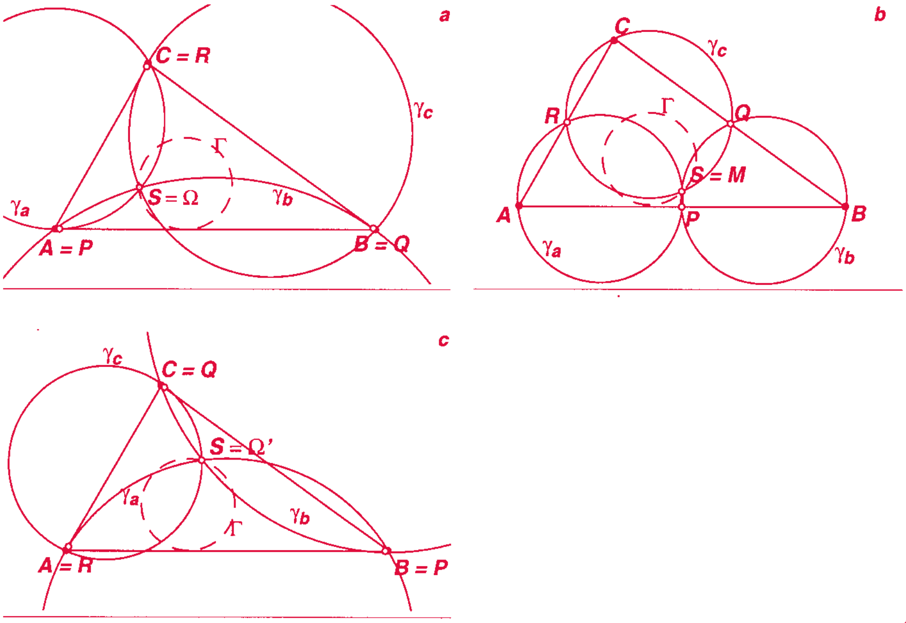
Punt K treedt hier op als het enige punt van Γ dat niet de rol heeft van Miquelpunt van een evenredig delend drietal. Dat klinkt wat negatief, maar eerherstel is mogelijk. Want K blijkt juist een van de zeer bijzondere punten van driehoek ABC te zijn. Voor wie bekend is met het begrip isogonale verwantschap, zij vermeld dat K isogonaal verwant is met het zwaartepunt van driehoek ABC. K is het zogenoemde *symmediaanpunt* van ABC. Een bewijs hiervan kan gebruik maken van de eerder aangegeven verhouding der afstanden van bijvoorbeeld T_b tot de zijden AB en BC en deze verhouding in relatie te brengen met de corresponderende verhouding voor het zwaartepunt van driehoek ABC.

10. Het derde en (voorlopig) laatste drietal op Γ

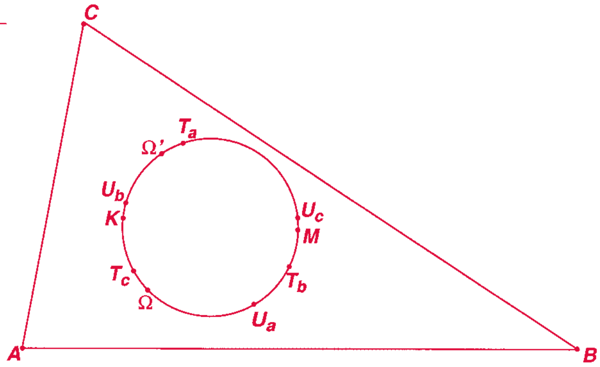
In figuur 9 zijn de bijzondere liggingen in beeld gebracht waarbij P samenvalt met A, met het midden van AB, of met B. In geval dat P het midden van AB is, vinden we dat $S = M$, het middelpunt van de omgeschreven cirkel (zie figuur 9b).
In geval $P = A$ (zie figuur 9a) moeten we voor γ_a de cirkel nemen die in A aan AB raakt en door C gaat. Analoge keuzen gelden voor de cirkels γ_b en γ_c. Men kan door een limietbeschouwing, maar ook gemakkelijk direct bewijzen, dat ook nu de drie cirkels door één punt gaan dat op Γ ligt. Dit punt is het zogenoemde *eerste Brocardpunt*, traditioneel met Ω aangeduid. In het derde geval, $P = B$ (zie figuur 9c), vinden we geheel analoog het *tweede Brocardpunt*, Ω'.
In het tweede geval, P is midden van AB (zie figuur 9b), is het middelpunt M van de omgeschreven cirkel van de driehoek het Miquelpunt.

11. Γ is de Brocardcirkel

In het voorgaande was de baan van S, het Miquelpunt van het (beweeeglijke) evenredig delende drietal P, Q, R op de zijden van ABC, aanleiding tot het vinden van de cirkel Γ en een serie bijzondere punten daarop. Deze dynamische aanpak werd ingegeven door gebruik van CABRI bij het spelen met de stelling van Miquel.
Er blijkt veel literatuur over dit probleemgebied te zijn. De cirkel Γ en de tien punten die nu aangegeven zijn, waren eind 19e eeuw bekend, maar de traditie achter deze punten is omgekeerd aan het verhaal dat hierboven verteld is.
De Brocardpunten Ω en Ω' zijn genoemd naar de Franse amateurwiskundige Brocard, luitenant bij het leger, die de punten in 1875 herontdekte. De oorspronkelijke ontdekker is A.L. Crelle, 1816. Het punt Ω werd aanvankelijk beschreven als het unieke punt waarvoor $\angle BA\Omega$, $\angle CB\Omega$, $\angle AC\Omega$ aan elkaar gelijk zijn.
De periode 1875-1890 is de gouden periode van de Brocardpunten en wat er mee samenhangt. Spoedig na 1875 werd ontdekt dat veel bijzondere punten op de cirkel door Ω, Ω' en M liggen, die toen de *Brocardcirkel* is gaan heten. Onze tweede driehoek $U_aU_bU_c$ heet in de literatuur de *eerste Brocarddriehoek* en ontstond door snijden van $B\Omega$, enzovoort, met de Brocardcirkel.
De driehoek $T_aT_bT_c$ is de zogenoemde *tweede Brocarddriehoek*. Het punt K, dat hierboven al geduid is als het snijpunt van de symmedianen, wordt sinds 1884 *punt van Lemoine* genoemd, maar was al in 1847 door Grebe beschreven. Dat het op de Brocardcirkel ligt, is ontdekt door Brocard.
Al deze informatie en veel meer is te vinden in '*Der Brocardische Gebilde*' van A. Emmerich uit 1895, een didactisch bedoelde samenvatting van 153 bladzijden van wat op dat moment over de Brocardpunten en wat er mee samenhangt, bekend was. Bijna aan het eind (blz. 130) staat de meetkundige plaats van S zoals die hierboven besproken is, vermeld. Hierbij moet de Nederlandse meetkundige Pieter Hendrik Schoute, 1846-1923, als eerste ontdekker genoemd worden.
P.H. Schoute hield overigens in 1892 een nu nog lezenswaardige rede over het Voorbereidende



FIGUREN 9A, 9B, 9C **Drie bijzondere standen**



FIGUUR 10 **De tien punten in één figuur**

Onderwijs in de Meetkunde; deze is toegankelijk op *http://www.math.sci.kun.nl/math/werkgroepen/gmfw/bronnen/schoute1.html*.
O. Bottema introduceert de Brocardpunten vanuit een ander startpunt in 'Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde' (hoofdstuk XXIII), waarin ook een fraai hoofdstuk over de isogonale verwantschap te vinden is (hoofdstuk XXIV). Een andere route naar dezelfde tien punten is te vinden in het fascinerende '*Episodes in Nineteenth and Twentieth Century Euclidean Geometry*' van Ross Honsberger, een uitgave van The Mathematical Association of America (1995). In één opzicht wijkt de in dit artikel gegeven benadering van de van de vier genoemde af: de lezer kreeg weinig tot geen kans zijn/haar algebraïsche vaardigheden te laten schitteren, wat de anderen juist wel doen.

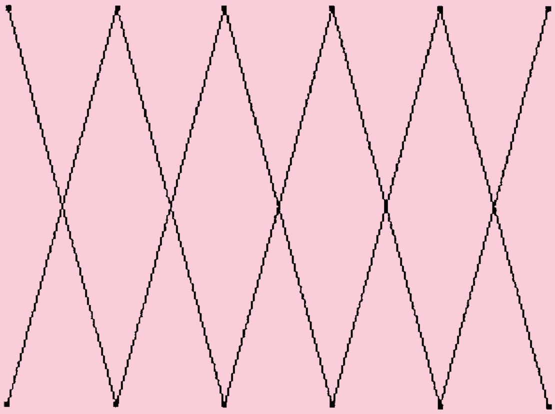
12. Tien punten in één figuur en enkele verdere merkwaardigheden

In figuur 10 zijn de tien beschreven punten nauwkeurig op de Brocardcirkel geconstrueerd.
Met de in dit artikel gegeven technieken kunnen veel van de eigenschappen van de diverse punten makkelijk bewezen worden; hier volgen er een paar.
- De hoeken $\angle BA\Omega$, $\angle CB\Omega$ en $\angle AC\Omega$ zijn aan elkaar gelijk. Deze hoek heet de Brocardhoek ω van driehoek ABC. $\angle AB\Omega'$, $\angle BC\Omega'$ en $\angle CA\Omega'$ zijn ook gelijk aan ω.
- $\Omega' M\Omega$ is gelijkbenig met tophoek 2ω.
- U_cM is de middelloodlijn van AB.
- KM is een middellijn van de Brocardcirkel.
- De punten A, Ω en U_c liggen op één lijn.
- De punten B, Ω' en U_c liggen eveneens op één lijn.
Men benutte bij de bewijzen de terugzoekconstructies van P, Q en R via de U- of T-punten ten volle bij de drie gevallen van figuur 9.
Van de talloze meer verborgen schoonheden die nog in figuur 10 liggen te sluimeren, volgen er tot slot twee zonder bewijs, waarvan de eerste wel (met bewijs) in het boek van Emmerich te vinden is, maar de tweede niet:
- T_aU_a, T_bU_b en T_cU_c zijn de zwaartelijnen van $U_aU_bU_c$ en het zwaartepunt van $U_aU_bU_c$ is gelijk aan het zwaartepunt van ABC.
- De lijn U_bU_c en de raaklijn in U_a aan de Brocardcirkel snijden elkaar op de lijn BC (er zijn uiteraard nog twee van dergelijke concurrenties).

Over de auteur

Aad Goddijn (e-mailadres: A.Goddijn@fi.uu.nl) is verbonden aan het Freudenthal Instituut te Utrecht.

Om te voorkomen dat kleuters van de trap kunnen vallen, kun je de trap afsluiten met een traphekje. Dat is een houten hekje dat je aan de breedte van de trap kun aanpassen. Hieronder zie je een afbeelding van zo'n hekje.



❶❾⑨

[a] Geef in de tekening met verschillende boogjes in de hoeken aan welke hoeken aan elkaar gelijk zijn.

[b] Zoek twee F- hoeken op en kleur deze geel.

[c] Zoek twee Z- hoeken op en kleur deze rood.

[d] Zoek twee supplementaire hoeken op en kleur deze blauw.

❷⓿ Onderzoek

- Open de figuur *Traphekje.fig* uit de map *Hoeken.*
  Bekijk wat er gebeurt als je het punt versleept.

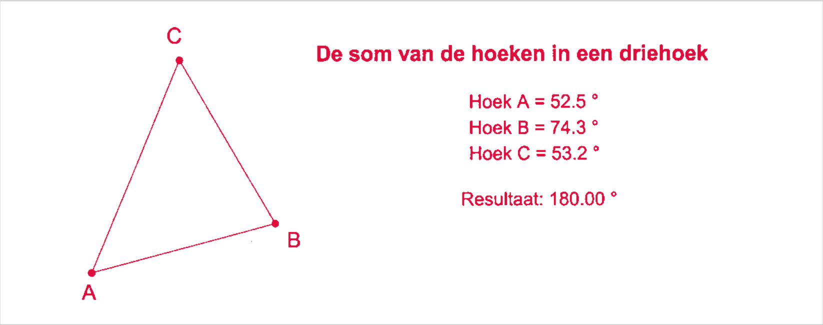
Je kunt ook de grootte van de bovenste hoek en de breedte van het hekje aflezen.
Hoe groter deze hoek is, hoe breder het hekje.
Als je de hoek twee keer zo groot maakt, wordt dan het hekje ook twee keer zo breed?
Onderzoek deze vraag met behulp van Cabri.
Je kunt bijvoorbeeld een tabel en een grafiek maken van de hoek en de breedte van het hekje.
Geef een duidelijk antwoord op de vraag en schrijf er ook bij hoe je aan dat antwoord bent gekomen.

HET TRAPHEKJE, WERKEN MET CABRI IN DE ONDERBOUW

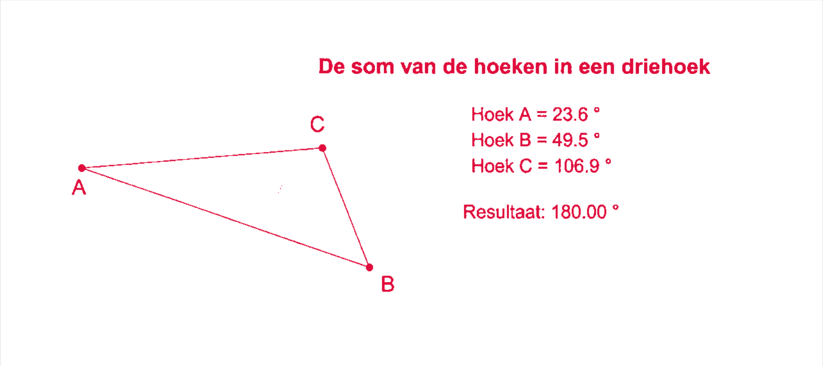
[Sieb Kemme]

Cabri

Cabri is een afkorting voor *Cabri Géomètre II* (CAhier de Brouillon Interactif, interactief schetsboek), een krachtig computerprogramma voor de 'dynamische' vlakke meetkunde. In het kort gezegd komt het erop neer dat met het programma vlakke figuren op het scherm kunnen worden getekend die daarna door verslepen kunnen worden veranderd en die zo op constante eigenschappen kunnen worden onderzocht.
Bijvoorbeeld: *de som van de hoeken in een driehoek is 180°.*
De gebruiker tekent een driehoek, laat het programma de grootte van de hoeken meten en deze bij elkaar optellen.



Versleep dan de hoekpunten en stel vast dat wèl de verschillende hoeken in grootte zijn veranderd, maar dat de som van de hoeken 180° is gebleven.



Zo verschaft het programma *empirische* zekerheid aan de gebruiker over een eigenschap van een vlakke figuur. Natuurlijk kan alleen het verstand *wiskundige* zekerheid verschaffen, maar het programma kan daar wel een handje bij helpen.

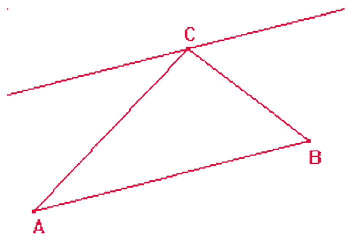
Cabri en wiskundige zekerheid

Wiskundige zekerheid vraagt om een bewijs. Dat wil zeggen: een redenering op basis van wiskundige argumenten waaruit de waarheid van de eigenschap volgt. Ondanks verwoede pogingen het bewijzen in de vlakke meetkunde te automatiseren, blijft het bewijzen in essentie toch gewoon denkwerk. En dat hoort het ook te blijven! Cabri kan dus geen bewijzen leveren, maar Cabri kan wel helpen op goede ideeën te komen. In het voorbeeld (op pagina 158) weten leerlingen wat *F*- en *Z*-hoeken zijn. Dat is de wiskundige basis van waarop ze hun argumenten mogen baseren.
Het gaat hierbij om het bedenken van een eenvoudige redenering die berust op het herkennen van de *Z*-hoeken in de figuur. Cabri speelt hierin een louter visuele rol. De veranderbaarheid van de situatie legt een duidelijk accent op de evenwijdigheid van de lijn met de basis (de stand van de lijn verandert mee met de stand van de basis) en vergroot zo de herkenbaarheid van de *Z*-hoeken in de figuur. De redenering ligt voor het grijpen.

Veel leerlingen vinden de overstap van *empirische* zekerheid naar *wiskundige* zekerheid maar lastig en snappen niet waar dat voor nodig is. Hun reactie is: 'Je ziet toch dat dat waar is. Waarom moet je dat dan nog een keer bewijzen?' Ze hebben natuurlijk het grootste gelijk van de wereld. Hun zekerheden over de wereld ontlenen ze aan empirische zekerheden. Om te snappen wat nu precies wiskundige zekerheid is, zal er toch eerst een knop moeten worden omgezet. Je kunt je afvragen

➢ Open de figuur *Hoekensom2.fig* uit de map *Hoeken*.

Door de top *C* van de driehoek is een lijn getekend die evenwijdig loopt aan de basis *AB*.



➢ Controleer dit door geschikte punten te verslepen.

1 In de figuur vind je een aantal *Z*-hoeken.
Neem de figuur over en geef met boogjes in de hoeken aan welke hoeken bij elkaar horen.

2 In hoekpunt *C* komen drie hoeken bij elkaar.
Schrijf een redenering op waaruit volgt dat de som van de hoeken in een driehoek 180° is.

of het bestaan van Cabri daar wel een positieve bijdrage aan levert. In bovenstaande voorbeelden zal de veranderbaarheid van de figuren de empirische argumentatie misschien zelfs versterken. Feit blijft dat leerlingen het uitdagend vinden om met behulp van de computer met meetkunde bezig te zijn en dat dit duidelijk de concentratie ten goede komt.

Cabri in de onderbouw

Doorgaans wordt het gebruik van Cabri geassocieerd met de meetkunde in het examenprogramma B2 van het profiel Natuur en Techniek in het vwo, dus voor de wiskundige bollebozen in klas 5 en 6 van het vwo. Inderdaad speelt het bedrijven van vlakke meetkunde met de computer een belangrijke rol bij deze leerlingen. Cabri stimuleert tot het zelf vinden van eigenschappen en tot het leveren van een wiskundig bewijs.
Maar ook in de onderbouw kan Cabri een rol spelen. Het is een plezierige opstap voor deze leerlingen om actief met meetkunde aan de gang te gaan. Over het algemeen is het construeren van een correcte figuur een hele klus, maar het is wel een essentieel onderdeel in de meetkunde van de bovenbouw. Dit kan de onderbouwleerlingen bespaard blijven door ze met ‘voorgemaakte’ figuren te laten werken, zoals hierboven is gebeurd. Deze figuren kunnen zelfs met een eenvoudige druk op de knop in HTML-code worden omgezet waarmee ze binnen Explorer - en dus ook via het schoolnetwerk - kunnen worden bekeken. Voor 3-mavo is zo een serie werkbladen gemaakt over hoeken. Het werkblad (op pagina 156) komt uit deze serie. De volledige serie kan worden gedownload vanaf *http://www.educadbv.nl*.

Over de auteur

Sieb Kemme (e-mailadres: siebkemme@educadbv.nl) is als freelancer betrokken bij de ontwikkeling van middelen en materialen voor het wiskundeonderwijs. Daarnaast verkoopt hij wiskundesoftware, waaronder Cabri. In dat kader ontwikkelde hij werkbladen bij Cabri voor de onderbouw van het VO (website: http://www.educadbv.nl).

Boekbespreking / De veelzijdigheid van bollen, Martin Kindt en Peter Boon

Epsilon Uitgaven, ZEBRA-reeks no. 9, Utrecht (2001), ISBN 90 5041 066 9

[Hans Sterk]

Hoe eenvoudig en alledaags een bol er ook uitziet, de bol nodigt in allerlei verschijningsvormen uit tot diepere vragen, tot het bedrijven van wiskunde. In dit boekje voor vwo-leerlingen richten de schrijvers zich op 'bollen' in de gedaante van veelvlakken. Diverse illustraties tonen de fascinatie van mensen voor veelvlakken en voorbeelden ervan in de natuur. Tekst en opdrachten in het boekje voeren langs verscheidene typen veelvlakken, langs de formule van Euler, langs afknotten en uitstulpen en langs geodes (veelvlakken begrensd door louter driehoeken). Er wordt stilgestaan bij het begrip dualiteit maar ook bij fullerenen, veelvlakken die in de scheikunde een rol spelen bij koolstofstructuren, zoals de Bucky Ball met de structuur van een voetbal.
Veelvlakken zijn tamelijk gecompliceerd om zo maar uit je hoofd mee te exerceren; je zou ze graag willen vasthouden, aan alle kanten bekijken, ze uit elkaar vouwen enzovoorts. Om experimenteren mogelijk te maken, hebben de auteurs een modern middel ingezet en een website bij het boek geleverd, waarin je via applets aan veelvlakken kunt sleutelen en aan de eindopdracht kunt werken (meer een feestopdracht: ontwerp je eigen kunstbol). Bij mij haperde er helaas wel eens wat (vastlopen, niet opstarten van applets), zodat ik niet alles kon uitproberen of gebruiken.
Het immer aanwezige spanningsveld tussen de meer intuïtieve en visuele aanpak en wiskundige strengheid is in dit boekje enigszins voelbaar en kan wel eens tot verwarring leiden, maar wellicht vooral gezonde discussie uitlokken. Voor leerlingen vormen boek en website een pittige maar inspirerende kluif. Jammer overigens dat er redelijk wat typefouten in het boekje staan.

Boekbespreking / Wiskunde in Werking, deel 1, M. de Gee

Epsilon Uitgaven 48, Utrecht (2001), ISBN 90 5041 063 4, 288p, ƒ42,50

[Jan van de Craats]

De ondertitel van dit boek luidt *vectoren en matrices toegepast*.
Men kan de inhoud karakteriseren als een standaard-cursus voor bijvakstudenten in het rekenen met vectoren en matrices. Vier van de vijf hoofdstukken komen in licht gewijzigde vorm overeen met hoofd-stukken uit het boek *Wiskunde in Werking* van dezelfde auteur, dat als deel 28 van de Epsilon-reeks is verschenen. In het laatste hoofdstuk wordt een aantal speciale soorten matrices behandeld.
Wat het boek aantrekkelijk maakt, is het grote aantal voorbeelden en opgaven die afkomstig zijn uit allerlei toepassingsgebieden, onder andere de biologie, de economie, de meteorologie, de levensmiddelen-technologie, de geneeskunde en de bedrijfskunde. De wiskunde zelf wordt echter uitsluitend receptmatig behandeld. Stellingen heten 'Eigenschappen'; bewijzen worden niet gegeven. In de eerste vier hoofdstukken beperkt de auteur zich tot vectoren in R^n en reële matrices, in het laatste hoofdstuk komen ook hermitese matrices en unitaire matrices ter sprake. Het boek bevat een grote collectie opgaven, met antwoorden achterin.

Verschenen / L.E.J. Brouwer, een biografie

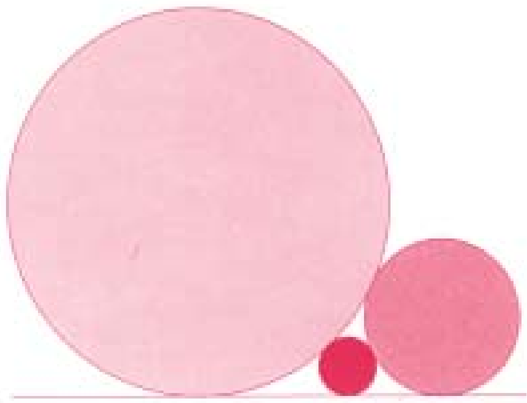
Dirk van Dalen, *L.E.J. Brouwer, een biografie*
Bert Bakker; ƒ 71,50; 562 pagina's; ISBN 9035 12185 6

In een volgend nummer van Euclides zal een uitvoerige bespreking van dit boek verschijnen.

SANGAKU EN INVERSIE

In 1999 zijn in 'Pythagoras', het wiskundetijdschrift voor jongeren, twee artikelen verschenen over Sangaku's [1]. In het onderstaande wordt ingegaan op de constructie van een van de Sangaku-figuren met gebruikmaking van inversie.

[Dick Klingens]



0. Sangaku = wiskunde-tablet

Bij het eerste artikel in Pythagoras staat als inleiding: 'Gedurende het grootste deel van de Edo-periode (1603-1867) was Japan afgesloten van de Westerse wereld. Maar geleerden uit alle lagen van de bevolking, van boeren tot samoerai, bedachten stellingen uit de vlakke meetkunde. Deze stellingen verschenen als prachtig gekleurde tekeningen op houten tabletten, die opgehangen werden onder de daken van tempels.
Zo'n tablet werd een *Sangaku* genoemd, Japans voor 'wiskunde-tablet'. Veel meetkundigen lieten een sangaku maken om de goden te danken voor de ontdekking van een stelling. Het bewijs van de stelling werd zelden gegeven, maar werd als uitdaging overgelaten aan andere meetkundigen: 'Kijk maar eens of je dit kunt.'
In de afgelopen tweehonderd jaar zijn vele tempels verlaten of vernietigd, en de sangaku's die daar hingen bestaan niet meer. Maar ongeveer 820 sangaku's hebben de tand des tijds overleefd [2].'

1. Kijk maar eens of je dit kunt

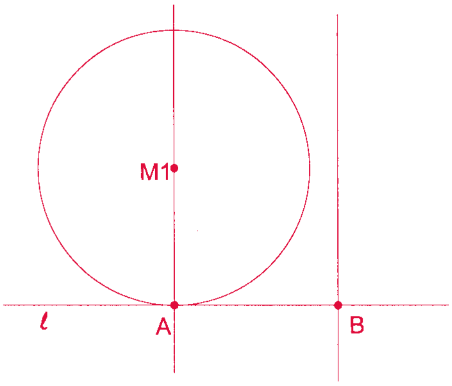
Bovenstaande afbeelding [3] komt - natuurlijk niet in deze vorm - voor op een tablet uit 1824 in Gunma, een 'provincie' van Japan. De grootste en de middelgrote cirkel raken elkaar en raken ook aan dezelfde horizontale lijn. De kleinste cirkel raakt deze lijn eveneens, en raakt ook aan de beide grotere cirkels. Een eigenschap die in dit geval bewezen moet worden, is onder meer:

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

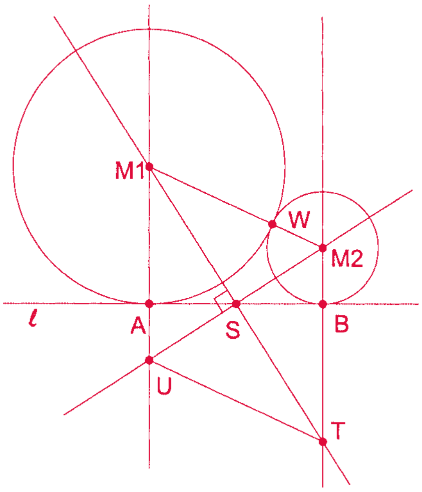
Wat de gebruikte letters voorstellen, moet je bij een sangaku vaak zelf nog uitzoeken.

Het gaat hier niet om die formule, maar wel om de wijze waarop een dergelijke figuur geconstrueerd kan worden. En onder 'construeren' verstaan we dan tekenen op de *klassieke* (Euclidische) manier: alleen met een passer en een liniaal (zonder centimeter-verdeling). Voor het tekenen van loodlijnen en voor het vinden van het midden van een lijnstuk mogen we (bij hoge uitzondering en alleen ter bevordering van de nauwkeurigheid) een geodriehoek gebruiken.

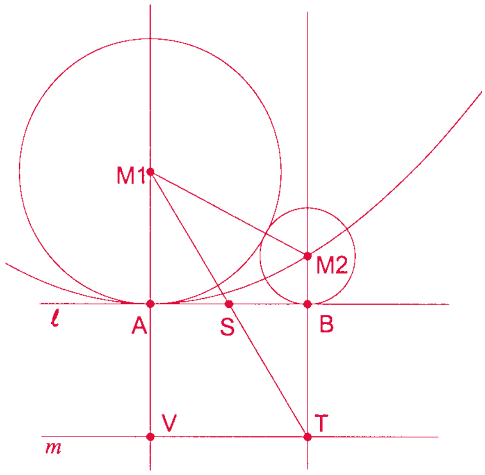
Voor de hand ligt te beginnen met de horizontale lijn - we geven deze in de tekst aan met de letter l - en de grootste cirkel, de eerste sangaku-cirkel. Het middelpunt daarvan is M_1 (zie figuur 1). We hebben in de figuur ook al vast maar de lijn getekend - de loodlijn door het punt B op l – waarop het middelpunt M_2 van de middelgrote cirkel, de tweede sangaku-cirkel, moet liggen. Je kunt zelf nagaan dat er maar één cirkel is die aan de gestelde eisen voldoet – raken aan l én raken aan de reeds getekende cirkel.
Maar waar precies ligt M_2?
Uitrekenen? Dat kan, maar uit de volgende constructie blijkt dat de plaats van M_2 ook te vinden is *zonder* rekenwerk.



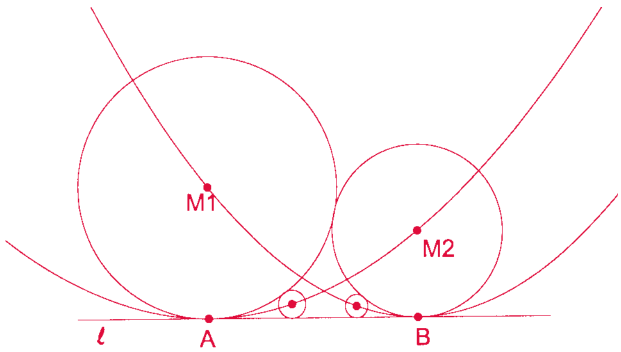
FIGUUR 1



FIGUUR 2



FIGUUR 3



FIGUUR 4

We zijn in figuur 2 begonnen met het midden S van AB. Daarna hebben we achtereenvolgens T, U (via de loodlijn in S op ST) en M_2 gevonden. Gemakkelijk kun je dan aantonen, dat vierhoek M_1UTM_2 een ruit is, en dat daardoor $M_2W = M_2B$.
Maar hoe zit het nu met die derde cirkel?

2. Twee parabolen

Het zit er (op het eerste gezicht?) niet in dat we het middelpunt van de derde sangaku-cirkel (we geven het aan met M_3) kunnen construeren als snijpunt van twee rechte lijnen.
We kijken nog eens naar het begin van onze constructie. We kunnen ons afvragen waar de middelpunten M_2 liggen van *alle cirkels* die aan cirkel M_1 en de lijn l raken: we zoeken de *meetkundige plaats* van de middelpunten M_2.
Bij nadere beschouwing van figuur 3 blijkt, dat de punten T, bij gewijzigde positie van het punt B, steeds op een lijn liggen die op een afstand r_1 van de lijn l ligt. Immers, steeds geldt $BT = M_1A = r_1$.
Zodat, wat de positie van het punt B ook is:
$M_2T = r_1 + r_2$
$M_2M_1 = r_1 + r_2$
En hieruit volgt $M_2T = M_2M_1$.
Uit de (analytische) meetkunde is bekend, dat de punten M_2 dan op een *parabool* liggen.

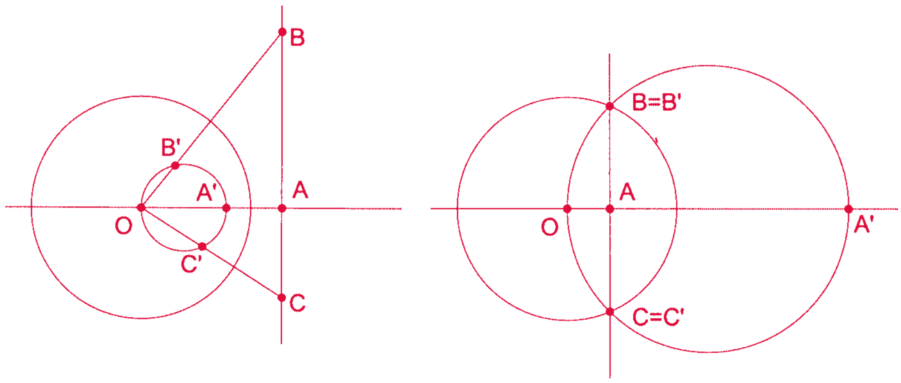
(Een parabool is de verzameling van de punten die gelijke afstand tot een vast punt – in dit geval is dat M_1 – en een vaste lijn hebben. De vaste lijn is hier de lijn m evenwijdig aan l door het spiegelbeeld V van M_1 in l).

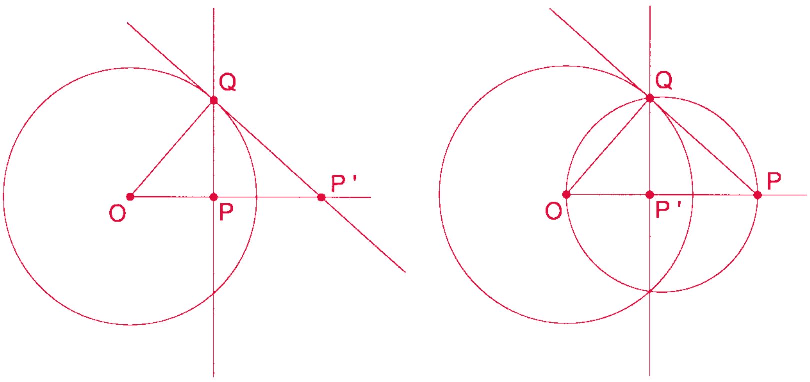
Doen we nu hetzelfde voor alle cirkels die *alleen* raken aan de tweede cirkel én aan de lijn l (we kijken dan naar de meetkundige plaats van de punten M_1), dan liggen die middelpunten dus ook op een parabool (zie figuur 4).
Het snijpunt van beide parabolen is dan het middelpunt van de derde sangaku-cirkel!
Daar zitten we dan met onze passer en liniaal. Parabolen kun je daarmee niet tekenen.

3. Inversie

Er bestaat een transformatie van het platte vlak waarmee je o.a. rechte lijnen op cirkels en cirkels op rechte lijnen kan afbeelden. Die transformatie heet **inversie**. De inversie is een soort spiegeling, maar dan niet in een rechte lijn, zoals bij de 'gewone' spiegeling, maar in een cirkel (een 'lachspiegeling'?).
Hoe je het beeld van een punt bij inversie in een cirkel bepaalt, behandelen we hieronder (zie eventueel ook [4]).
We zullen daarna zien (in paragraaf 4), dat zo'n inversie gebruikt kan worden om de derde rakende cirkel van onze sangaku direct te construeren.

A. Het beeld van een punt
Zie figuur 5. Het beeld P' van een punt P bij inversie ten opzichte van een cirkel met middelpunt O en straal k wordt vastgelegd via de relatie $OP \cdot OP' = k^2$ waarbij P' op de lijn OP ligt.





FIGUUR 5A, 5B

FIGUUR 6A, 6B

Hieruit volgt dat *k* middelevenredig is tussen *OP* en *OP'*. De constructie van het beeld van P verloopt dan via een raaklijn aan de inversiecirkel (zie figuur 5 - links: *P* binnen de cirkel; rechts: *P* buiten de cirkel). Uit de definitie volgt direct dat *P* = *P*' als *P* op de inversiecirkel ligt.

B. Het beeld van een rechte lijn die niet door O gaat
Zie figuur 6. Als je van een rechte lijn de beelden van drie punten neemt, dan zie je dat de beeldpunten zeker niet op een rechte lijn liggen. We kunnen bewijzen (we laten het aan de lezer) dat ze op een cirkel liggen die door het punt *O* gaat.
Het middelpunt van de cirkel is het midden van *OA*', waarbij *A*' het inverse beeld is van het voetpunt *A* van de loodlijn uit *O* op de lijn. Je hoeft dus alleen maar het beeld van het punt *A* te bepalen om de cirkel te kunnen tekenen.

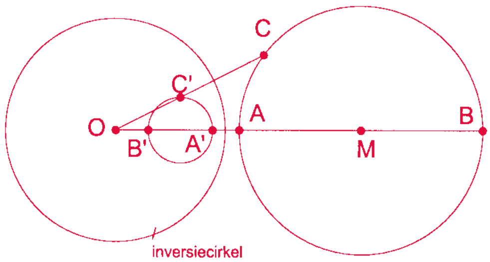
C. Het beeld van een rechte lijn die door O gaat
Eenvoudig blijkt, dat het beeld van een lijn die door *O* gaat, *geen* cirkel is. Het beeld van die lijn valt samen met de lijn zelf.

D. Het beeld van een cirkel die door O gaat
Uit de manier waarop we de afbeelding hebben gedefinieerd, blijkt dat het beeld van een cirkel die door *O* gaat een *rechte lijn* is (zie B en ook figuur 6).

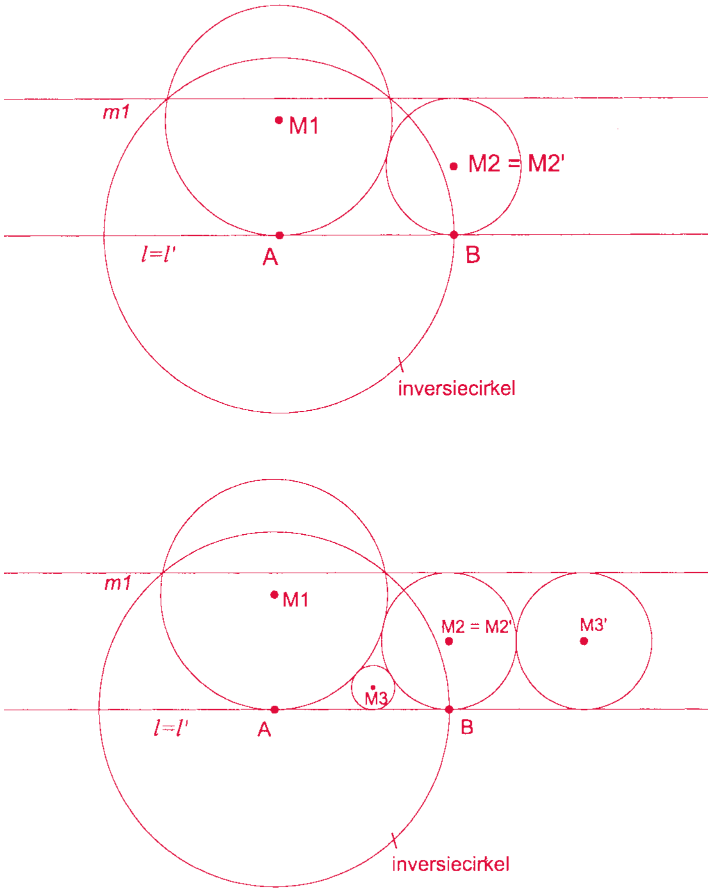
E. Het beeld van een cirkel die niet door O gaat
We kunnen kort zijn (zeker als we het bewijs niet geven). Ook dat beeld is een cirkel (zie figuur 7).
We geven in dit geval de constructiestappen:
1. Teken de lijn door *O* en *M*.
2. Deze lijn snijdt cirkel *M* in de punten *A* en *B*.
3. Het beeld van de cirkel is de cirkel met middellijn *A*'*B*', waarbij *A*' en *B*' de inverse punten zijn van *A* en *B*.

4. De derde sangaku-cirkel

Zoals reeds aangekondigd zullen we de derde sangaku-cirkel met behulp van inversie construeren.
We kiezen de cirkel met middelpunt *A* en straal *AB* als inversiecirkel; zie figuur 8a. Je moet een inversiecirkel soms handig kiezen.
De lijn *l* wordt door deze inversie op zichzelf afgebeeld. Cirkel M_1 wordt afgebeeld op een lijn (m_1) die, vanwege de ligging, evenwijdig is met *l*.
Cirkel M_2 is bij deze inversie een bijzondere: hij snijdt de inversiecirkel loodrecht in het punt *B*. En daarom wordt cirkel M_2 op zichzelf afgebeeld. Het bewijs van deze eigenschap staat in het kader op pagina 163.
Het gevolg is, dat de lijn m_1 raakt aan de tweede sangaku-cirkel.
Door deze inversie hebben we het constructieprobleem enigszins vereenvoudigd.
We zullen nu een cirkel construeren die raakt aan de drie inverse beelden, dus rakend aan *l*, m_1 en cirkel M_2. En die cirkel onderwerpen we daarna weer aan de inversie.
We hebben ons wellicht nog niet gerealiseerd, dat punten van het binnengebied van de inversiecirkel



FIGUUR 7



FIGUUR 8A, 8B

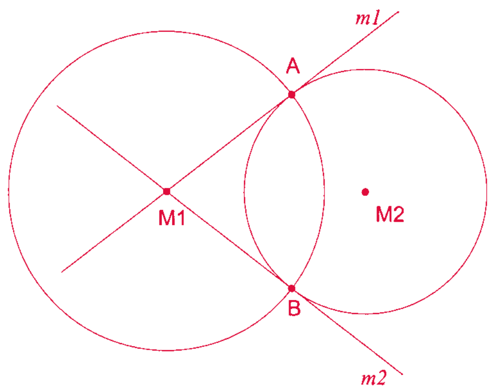
worden afgebeeld op punten buiten de inversiecirkel (en omgekeerd).
Wel, de cirkel die we zoeken, ligt geheel binnen de inversiecirkel. De te construeren cirkel ligt dus buiten de inversiecirkel. Nu is het verder niet ingewikkeld meer. Er is maar *een* cirkel die aan de gestelde eisen voldoet: cirkel M_3' (zie figuur 8b).
En als we deze cirkel inverteren, dan krijgen we de derde sangaku-cirkel (M_3).

5. Tot slot

Door de Stichting *Ars et Mathesis* is (ook) in 1999 een 'Sangaku-project' uitgevoerd door *Ineke Lambers* (ars) en *Zsòfia Ruttkay* (mathesis) [5]. Uitgaande van enkele klassieke Japanse wiskunde-opgaven zijn bij dat project hedendaagse 'sangaku-impressies' ontworpen. In figuur 10 zien we de impressie van de hand van Ineke Lambers van 'onze' sangaku. Deze sangaku is er een uit een serie van vier die worden uitgegeven door genoemde stichting in de vorm van een wenskaart met bijsluiter, waarop de sangaku-wiskunde wordt behandeld. Op deze manier kunnen de sangaku's eenvoudig worden verspreid. Ze blijven dan zeker niet verborgen onder tempeldaken.

Conway en *Guy* vermelden in *The Book of Numbers* [6] nog een aardige bijzonderheid van de zogenoemde *Farey-rijen*. Een Farey-rij is een rij bestaande uit alle echte breuken met zo klein mogelijke noemer, gerangschikt van klein naar groot, beginnend bij een bepaalde breuk (die de orde van de rij aangeeft).

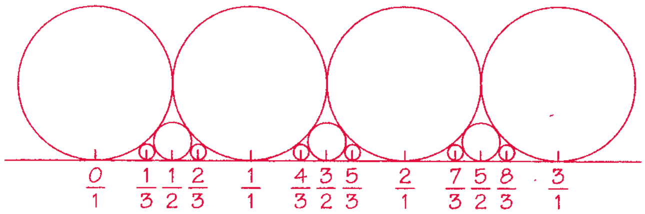
Stelling: *Als twee cirkels elkaar loodrecht snijden, dan beeldt de inversie met de ene cirkel als inversiecirkel de andere cirkel op zichzelf af.*



FIGUUR 9

Bewijs: In **figuur 9** snijden de cirkels M_1 en M_2 elkaar loodrecht. De raaklijnen m_1 en m_2 in A en B aan cirkel M_2 gaan dan door M_1. We inverteren nu met cirkel M_1 als inversiecirkel. Daardoor wordt cirkel M_1 op zichzelf afgebeeld. Dat is ook het geval met m_1 en m_2 (ze gaan immers door het punt M_1; zie 3C). Cirkel M_2 wordt dus afgebeeld op een cirkel die gaat door de punten A en B en die in die punten raakt aan de lijnen m_1 en m_2. En dat is cirkel M_2.





FIGUUR 10 Ineke Lambers: Sangaku-kwartet/2; kleur; 8,5 x 8,5 cm

FIGUUR 11 Ford-cirkels voor gehelen, halven en derden ([6], p.153)

Orde													
1	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$											
2	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$										
3	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$								
4	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$						
5	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{1}$		
6	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{1}$

Willen we uit een rij de volgende rij maken, dan voegen we telkens tussen de breuken a/b en c/d de 'mediaanbreuk' $(a+c)/(b+d)$ in.
Om de Farey-rij van de 7e orde uit die van de 6e te krijgen moeten we invoegen:

$$\frac{0+1}{1+6} \quad \frac{1+1}{4+3} \quad \frac{2+1}{5+2} \quad \frac{1+3}{2+5} \quad \frac{2+3}{3+4} \quad \frac{5+1}{6+1}$$

Lester R. Ford heeft een fraaie manier gevonden om de Farey-rijen te illustreren. Boven elk rationaal getal p/q op de getallenlijn tekenen we een cirkel met straal $1/q^2$. We krijgen dan figuur 11 en figuur 12.
De Ford-cirkels bij a/b en c/d raken elkaar indien de getallen ad en bc opvolgende gehele getallen zijn, en dan behoort de grootste cirkel daartussen bij de mediaanbreuk $(a+c)/(b+d)$; zie figuur 13.

Is het verband tussen de stralen van de Ford-cirkels en de sangaku-formule

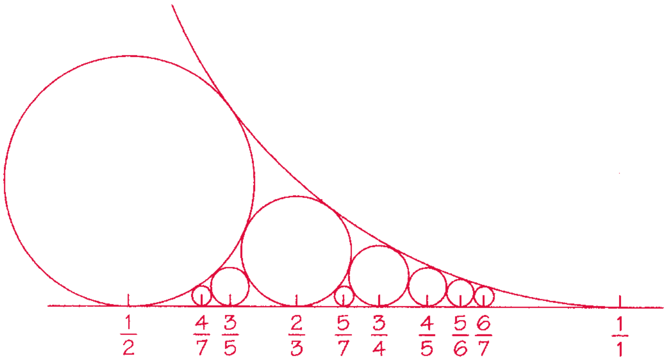
$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

hiermee nu duidelijk?

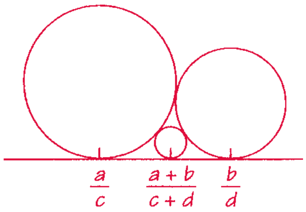
In het bovenstaande zijn er enkele zaken, wiskundig gezien, opengelaten. Maar dat is gedaan in de 'traditie' van de sangaku: 'Kijk maar eens of je dit kunt'.

Naschrift

Met dank aan Gert de Kleuver voor de kritiek op een eerdere versie van dit artikel en aan Jan Meerhof voor diens inhoudelijke bijdrage.
Ten slotte zij opgemerkt, dat bovenstaande sangaku-constructie ook kan worden opgevat als een bijzonder geval van het Raakprobleem van Apollonius: het construeren van (alle) cirkels die raken aan drie gegeven cirkels [12, pp.101-106, en 14, XV]. Bij onze sangaku is één van die cirkels dan ontaard in een rechte lijn.



FIGUUR 12 De uitvergrote tweede helft van de Farey-rij van de orde 7 ([6], p.153)



FIGUUR 13 Twee Ford-cirkels en hun mediaancirkel ([6], p.154)

Noten

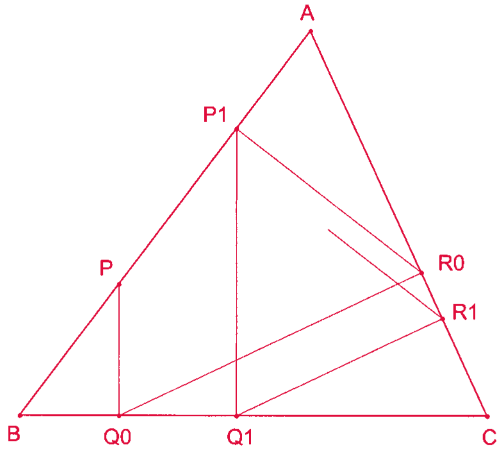
[1] Zsòfia Ruttkay: Vier Sangaku-opdrachten, in Pythagoras (1998-1999, juni)
http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/jaargang/9899/jun99/sangaku.php3 en
Zsòfia Ruttkay: Oplossingen Vier Sangaku-opdrachten, in Pythagoras (1998-1999, augustus)
http://www.science.uva.nl/misc/pythagoras/jaargang/9899/aug99/sangaku.php3
[2] Mathematics Museum, Japan
http://www.asahi-net.or.jp/~nj7h-ktr/english.html
[3] Alle figuren in dit artikel zijn, waar niet anders vermeld, door de auteur getekend met behulp van het computerprogramma Cabri Géomètre II (Texas Instruments, Utrecht)
[4] Homepage Dick Klingens
http://www.pandd.demon.nl/inversie.htm (een webbpagina over Inversie) en
http://www.pandd.demon.nl/inversie/wbinversie.htm (een Cabri-werkblad over Inversie)
[5] Stichting Ars et Mathesis, p/a Beverodelaan 205, 6952 JH Dieren, tel. 0313-413307
http://www.arsetmathesis.nl en
http://www.cwi.nl/~zsofi/sangaku/site/MovingSan.html
Zie ook het artikel 'Sangaku – wiskunde als kunst' van Zsòfia Ruttkay via http://www.arsetmathesis.nl/sangatekst.htm
[6] John H. Conway, Richard K. Guy: The Book of Numbers, Springer Verlag (New York, 1996)

Literatuur

[7] O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire meetkunde, Epsilon Uitgaven (Utrecht, 1997), hfdst. XXI
[8] Howard Eves: A Survey of Geometry, Allyn and Bacon Inc. (Boston, 1972)
[9] H. Fukagawa, D. Pedoe: Japanese Temple Geometry Problems, Charles Babbage Research Foundation (Winnipeg, Canada, 1989)
[10] H. Fukagawa, D. Sokolowsky: Traditional Japanese Mathematics Problems from the 18th and 19th Centuries, Science Culture Technology Publishing, Singapore (in druk)
[11] Yoshio Mikami: The Development of Mathematics in China and Japan, Chelsea Publishing Company (New York, 1974)
[12] Dan Pedoe: Geometry, a comprehensive course, Dover Publications (New York, 1988)
[13] Tony Rothman, Hidetoshi Fukagawa: Japanese Temple Geometry, in Scientific American (mei 1998)
ook: http://www.sciam.com/1998/0598issue/0598rothman.html
[14] P. Wijdenes: Vlakke Meetkunde voor Voortgezette Studie, P. Noordhoff N.V.(Groningen, 1964)

Over de auteur

Dick Klingens (e-mail: dklingens@pandd.demon.nl) is eindredacteur van Euclides en als leraar wiskunde verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel.

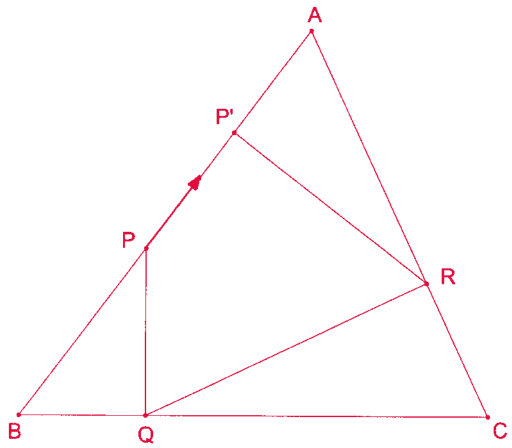


FIGUUR 1

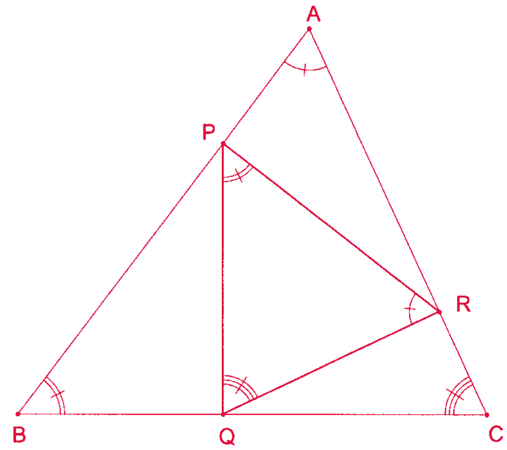
EEN RAADSELACHTIGE RECHTE

Inductief denken met CABRI bij een sluitingsvraagstuk voor een driehoek van O. Bottema

[Lodewijk van Schalkwijk]



FIGUUR 2



FIGUUR 3

Inleiding

In ‘Een sluitingsvraagstuk voor een driehoek’ in [1, XV] poneert O. Bottema het volgende probleem (zie ook figuur 1):

‘*ABC* is een gegeven driehoek die wij gemakshalve scherphoekig willen onderstellen. Tussen *A* en *B* wordt het punt P_0 gekozen. Q_0 is de projectie van P_0 op *BC*, R_0 die van Q_0 op *CA*, P_1 die van R_0 op *AB*. Met P_1 als uitgangspunt wordt de route herhaald, waarbij Q_1, R_1 en P_2 verschijnen enzovoort. P_n is het punt op *AB* dat na *n* omlopen wordt bereikt; vanwege de scherphoekigheid van *ABC* liggen de punten *Q*, *R* en *P* op de zijden en niet op hun verlengden.
Men kan zich de volgende [vraag] stellen. Kan P_0 zó gekozen worden dat het punt P_n, na *n* omlopen verkregen, met P_0 samenvalt, zodat een gesloten gebroken lijn ontstaat?’

Bottema beantwoordt deze vraag met gebruik van goniometrie. Hij markeert de plaats van P_k door $P_kB = x_k$ en leidt vervolgens af:

$$x_1 = c\sin^2\alpha - x_0\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

en algemeen:

$$x_{n+1} = c\sin^2\alpha - x_n\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$$

Met de afkortingen

$$c\sin^2\alpha = k \quad\text{en}\quad \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = r \quad (k > 0 \text{ en } 0 < r < 1)$$

wordt dit

$$x_{n+1} = k - x_n r.$$

Hieruit leidt hij een formule voor x_n af:

$$x_n = k\frac{1-(-r)^n}{1+r} + (-1)^n x_0 r^n$$

Sluiting na één omloop volgt uit het oplossen van $x_1 = x_0$:

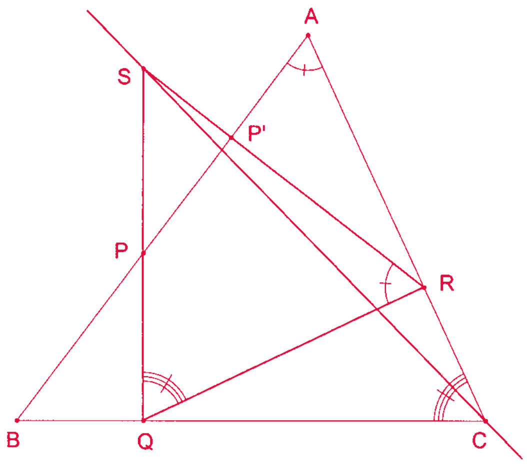
$$x_0 = L = \frac{k}{1+r} = \frac{c\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$

De vergelijking $x_n = x_0$ heeft ook *L* als oplossing. Bottema trekt de conclusie: ‘als de sluiting niet na één omloop plaats vindt, heeft nimmer sluiting plaats.’

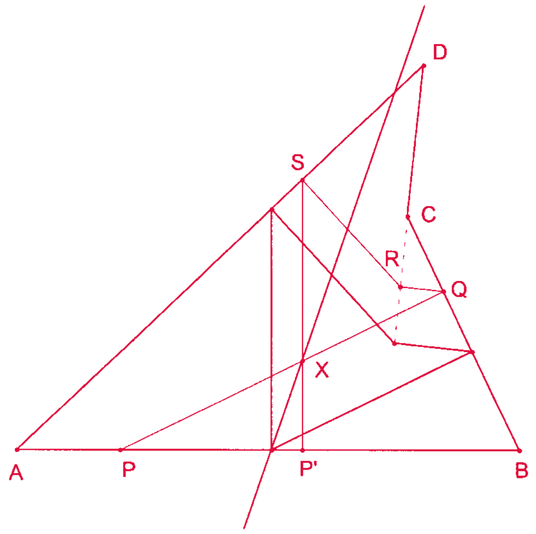
Dit hoofdstuk uit [1] is voor vwo-leerlingen uit de profielen NG en NT met enige inspanning te begrijpen. Het zou misschien gebruikt kunnen worden bij een praktische opdracht. Het is interessant om na te gaan of dit thema ook een geschikt uitgangspunt kan zijn voor leerlingonderzoek. In dit artikel probeer ik het onderzoeksterrein te verkennen. De vragen die daarbij aan de orde komen, zijn:
- Kun je dat sluitingspunt ook op een handige manier construeren?
- Hoe zit het bij een vierhoek, vijfhoek, enzovoort?
Bij de verkenning wordt dankbaar gebruik gemaakt van de nieuwe mogelijkheden die interactieve meetkundesoftware (in dit geval CABRI) biedt.

Constructie van het sluitingspunt

Met CABRI is het niet zo moeilijk het sluitingspunt experimenteel te vinden. Om te beginnen kies je een willekeurig punt *P* op de zijde *AB* en je construeert



FIGUUR 4



FIGUUR 5

achtereenvolgens de loodrechte projecties *Q*, *R* en *P'* op de lijnen *BC*, *CA* en *AB* (zie figuur 2).
(*Opmerking*: Zoals Bottema heeft aangetoond, is het niet nodig meer dan één *omloop* langs de drie zijden te maken om sluiting te onderzoeken. Daarom laat ik de indices in de namen weg en gebruik *P'* in plaats van P_1.)
Vervolgens pak je punt *P* vast en verschuift het in de richting van *P'* totdat beide punten samenvallen (zie figuur 3). Je krijgt dan een driehoek *PQR* die gelijkvormig is met driehoek *ABC*. (In het voorbeeld-examen vwo wiskunde B12 2000+ moest de gelijk-vormigheid van deze driehoeken bewezen worden.)

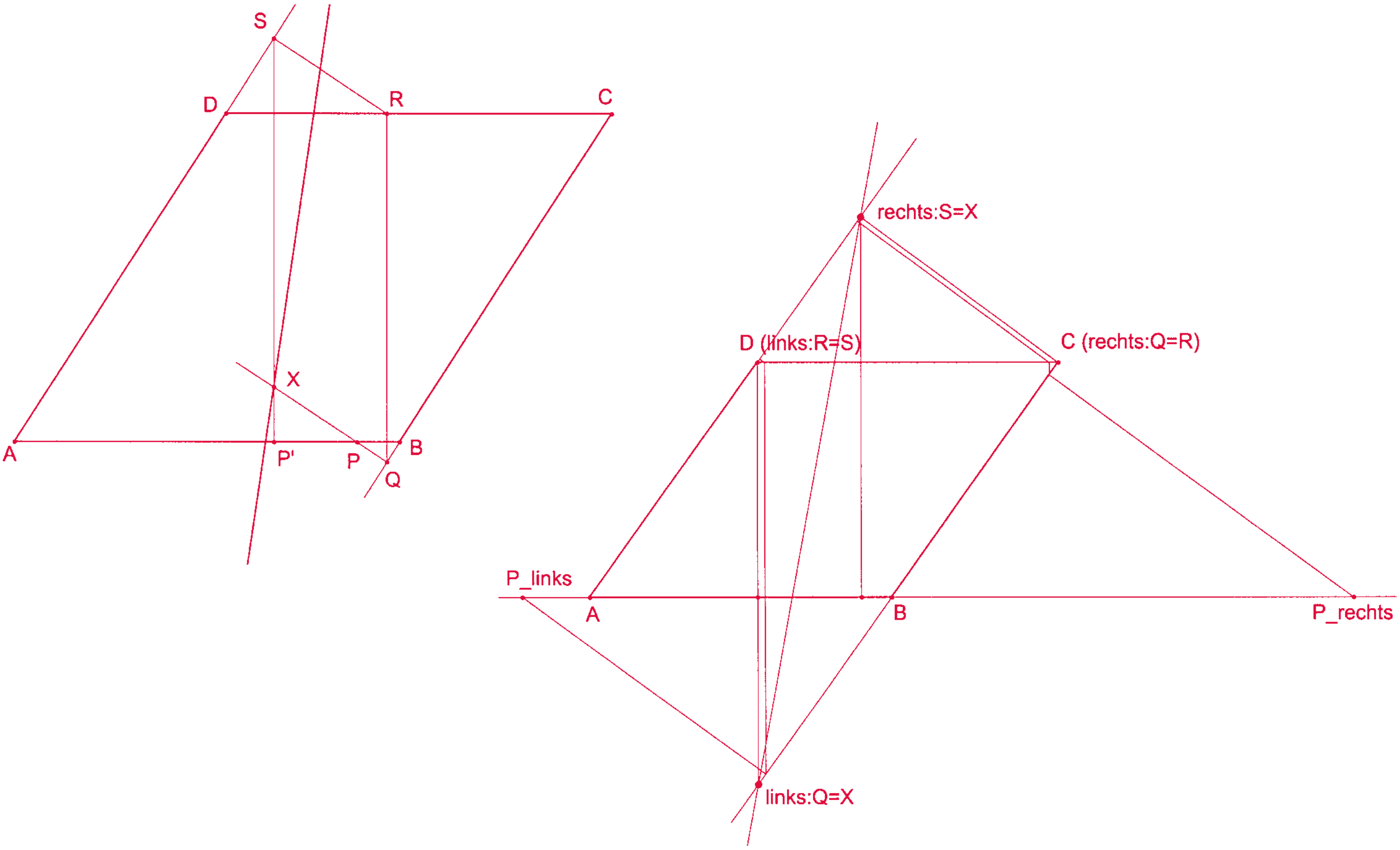
Wanneer je *P* weer terug schuift in de richting van *B* ontstaat er een afgetopte driehoek *PQRP'*. Deze vráágt erom te worden hersteld tot driehoek *SQR*, die ook weer gelijkvormig is met driehoek *ABC* (zie figuur 4).
In de constructie van CABRI is *S* afhankelijk van *P*. Je kunt dus de meetkundige plaats (*locus*) laten tekenen van *S* bij alle posities van *P* op lijn *AB*.
Het lijkt erop dat die meetkundige plaats een *rechte lijn* is, door *S* natuurlijk, maar ook door *C*. Deze rechte is de 'hoofdpersoon' in dit onderzoekje.
Als die rechte inderdaad door *C* gaat, dan hebben we een constructie om het sluitingspunt te vinden:
Kies een willekeurig punt *P* op de lijn *AB*; construeer de loodrechte projecties *Q*, *R* en *P'* achtereenvolgens op de lijnen *BC*, *CA* en *AB*; teken het snijpunt *S* van de lijnen *PQ* en *RP'*; trek de lijn *SC*; het snijpunt hiervan met de zijde *AB* is het gezochte sluitingspunt.

Die constructie is nog goed ook, want natuurlijk is die meetkundige plaats een rechte lijn door *C*. Al die mogelijke driehoeken *SQR* zijn immers op elkaar af te beelden door een puntvermenigvuldiging vanuit *C*, omdat *Q* en *R* slechts bewegen over respectievelijk lijn *BC* en lijn *CA*.

Een meetkundige in de huidige tijd heeft het – dank zij CABRI – makkelijker dan prof. Bottema. Doordat je in CABRI-figuren naderhand met onafhankelijk gekozen elementen kunt schuiven, kun je snel een groot aantal concrete gevallen van een algemenere situatie bekijken. Ook kun je de meetkundige plaats van afhankelijk gekozen punten laten tekenen. Met name die laatste mogelijkheid heeft tot het idee van deze constructie geleid.

Een poging tot generalisatie naar vierhoeken

Het ligt voor de hand deze constructiemethode ook op vierhoeken te proberen (zie figuur 5). We tekenen een willekeurige vierhoek *ABCD*. *P* is een punt op lijn *AB*. Door loodrechte projecties op de vier zijden van de vierhoek of hun verlengden krijg je de punten *Q*, *R*, *S* en *P'*. Punt *X* is het snijpunt van de lijnen *PQ* en *SP'*. Vraag aan CABRI de meetkundige plaats van *X* afhankelijk van *P* en je krijgt inderdaad weer een rechte lijn. Kies het snijpunt van deze rechte met lijn *AB* als startpunt voor de omloop langs de vier zijden en er treedt sluiting op! Hoe je ook sleept met de punten *A*, *B*, *C* of *D*, de sluiting blijft in stand.
(Wanneer je het probeert bij een zevenhoek lukt het ook! Dat geeft vertrouwen!)
Het enige probleem voor de constructie van het



FIGUUR 6A, 6B

sluitingspunt is dus nog greep te krijgen op die meetkundige plaats. Waarom zou het een rechte zijn? En kun je die rechte dan makkelijk construeren? Het antwoord op die vragen blijft voorlopig een raadsel.

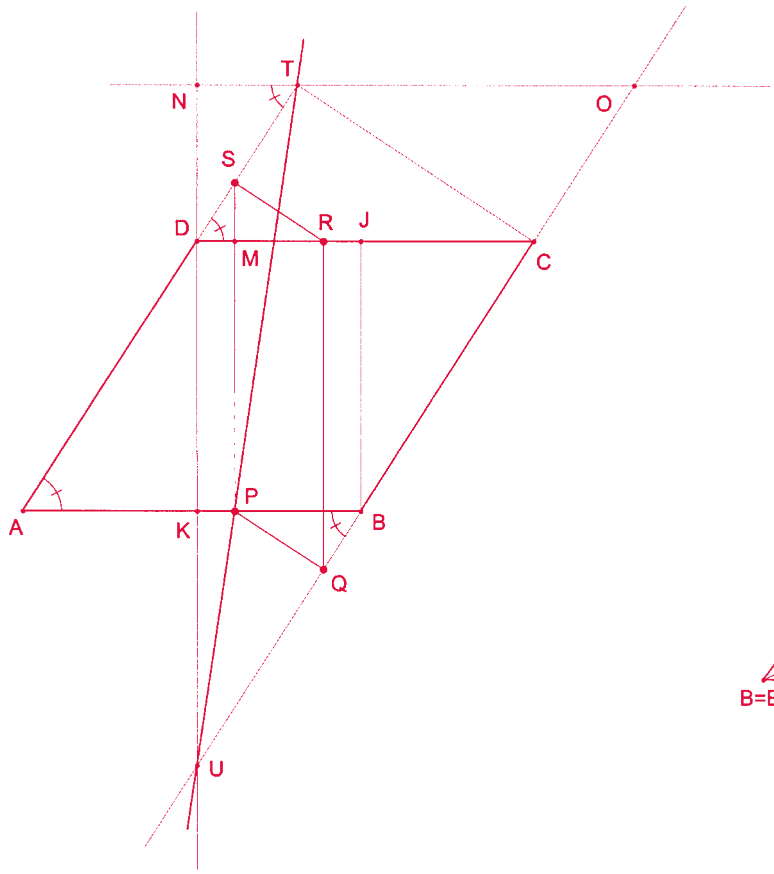
Een stapje terug: sluiting bij parallellogrammen

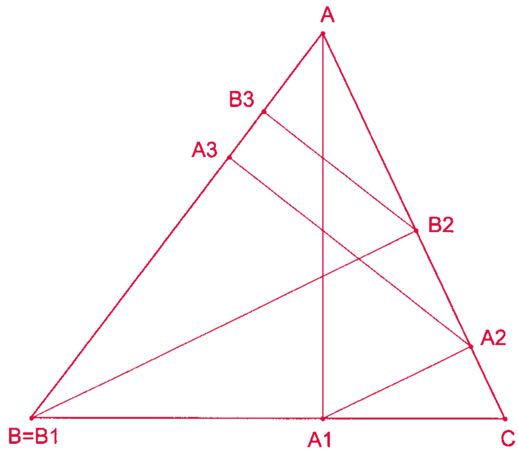
Omdat elk aanknopingspunt ontbreekt om vorderingen te maken bij de constructie van het sluitingspunt in een willekeurige vierhoek, lijkt het niet zo gek, eerst een speciaal geval te onderzoeken. Daarom kiezen we een willekeurig parallellogram $ABCD$ (zie figuur 6a).
P ligt op de lijn AB. De punten Q, R, S en P' zijn de loodrechte projecties op de opeenvolgende zijden van het parallellogram; X is het snijpunt van de lijnen PQ en SP', net als in de vorige paragraaf. In de figuur is ook de meetkundige plaats getekend van de punten X afhankelijk van de positie van de punten P op de lijn AB.
Het is niet moeilijk in te zien dat vierhoek $QRSX$ ook een parallellogram is, met dezelfde hoeken als parallellogram $ABCD$.
Dit parallellogram $QRSX$ kan in twee richtingen ontaarden door te zorgen dat twee achtereenvolgende projecties samenvallen. De eerste ontaarding krijgen we door P naar links te bewegen over de lijn AB, totdat de punten R en S samenvallen in D. $QRSX$ ontaardt dan tot een lijnstuk tussen de lijnen BC en DA, met D als grenspunt, dat loodrecht staat op de lijn AB.
De tweede ontaarding ontstaat door P naar rechts te bewegen, totdat Q en R samenvallen in C. In dat geval ontaardt $QRSX$ tot een lijnstuk tussen de lijnen BC en DA, met C als grenspunt, dat loodrecht staat op de lijn DA. Deze ontaardingen zijn in figuur 6b weergegeven.
Nu zijn we, al experimenterend, op het spoor gekomen van een constructie voor het sluitingspunt bij parallellogrammen:
Teken de loodrechte projectie (T) van C op de lijn DA. Teken de lijn door D loodrecht op lijn AB; teken het snijpunt van deze loodlijn met lijn BC (U). Het snijpunt van de lijnen TU en AB is het startpunt voor een sluitende omloop.
In de volgende paragraaf wordt bewezen dat deze constructie correct is.

Bewijs van de constructie van het sluitingspunt bij parallellogrammen

$ABCD$ is een parallellogram (zie figuur 7). T is de loodrechte projectie van C op lijn AD, U is het snijpunt van lijn BC met de lijn door D loodrecht op lijn AB. P is het snijpunt van de lijnen AB en TU; Q is de loodrechte projectie van P op lijn BC, R die van Q op lijn CD en S die van R op lijn DA.
Verder zijn er nog een aantal hulppunten opgevoerd:
J is de loodrechte projectie van B op lijn CD;
K is het snijpunt van de lijnen AB en DU;
L is het snijpunt van de lijnen AB en QR;
M is de loodrechte projectie van S op lijn CD;
N is de loodrechte projectie van T op lijn DU;
O is het snijpunt van de lijnen BC en NT.
De constructie is correct wanneer $KP = DM$.

Bewijs
1. $KP = LB$, want:
Stel $\angle DAB = \alpha°$. Dan ook $\angle PBQ = \angle RDS = \angle STN = \alpha°$.





FIGUUR 7 **FIGUUR 8**

Stel $AB = a$. Dan ook $DC = TO = a$ en $NT = DT \cdot \cos\alpha$ $= DC \cdot \cos^2\alpha = a\cos^2\alpha$.

Dus, $\dfrac{KP}{PB} = \dfrac{NT}{TO} = \dfrac{a\cos^2\alpha}{a} = \cos^2\alpha$ ofwel $KP = PB \cdot \cos^2\alpha$ (i)

$LB = QB \cdot \cos\alpha = PB \cdot \cos^2\alpha$ (ii)

Uit (i) en (ii) volgt $KP = LB$.

2. $LB = RJ$, want $LBJR$ is een rechthoek.

3. $DR = PB$, want $DR = DJ - RJ = KB - LB =$ $KB - KP = PB$ (immers $KBJD$ is een rechthoek).

4. Dus $DM = DS \cdot \cos\alpha = DR \cdot \cos^2\alpha = PB \cdot \cos^2\alpha$ (iii)

5. Uit (i) en (iii) volgt: $KP = DM$ □

Opmerking

Ook als het parallellogram een rechthoek is, werkt de constructie nog wel, met een beetje goede wil.

Terugblik

CABRI heeft dus de weg gewezen naar een elegante constructie van het sluitingspunt bij parallellogrammen. Met drie lijnen langs de geodriehoek kun je dat sluitingspunt immers construeren. Is die constructie nu te generaliseren tot een constructie voor n-hoeken?

Het lijkt erop dat dat niet het geval is; dat we een weg zijn ingeslagen die weliswaar de moeite waard was maar die niet kan worden vervolgd.

Terug naar af dus.

Een andere invalshoek

Laten we nog maar eens teruggaan naar het eenvoudigste geval, een driehoek. We gaan opnieuw omlopen bekijken, maar nu van *lijnstukken* in plaats van punten.

Neem een willekeurig lijnstuk op de zijde AB van driehoek ABC, bijvoorbeeld het lijnstuk AB (zie figuur 8). Loodrechte projectie van dit lijnstuk in een omloop langs de drie zijden geeft achtereenvolgens de lijnstukken A_1B_1, A_2B_2 en A_3B_3. Wanneer we de grootte van de hoeken van de driehoek op de bekende wijze aangeven met α, β en γ, dan geldt:

$A_3B_3 = AB\cos\beta\cos\gamma\cos\alpha$.

Het lijnstuk AB (maar ook elk ander lijnstuk op lijn AB) wordt dus gedurende de omloop vermenigvuldigd met een factor tussen −1 en 1. Er is dus sprake van een puntvermenigvuldiging [2].

We kiezen nu de punten S en Q als in figuur 9 en trekken de vertrouwde lijn SQ. Het snijpunt hiervan met lijn AB noemen we P. Dit punt P is het centrum van de puntvermenigvuldiging.

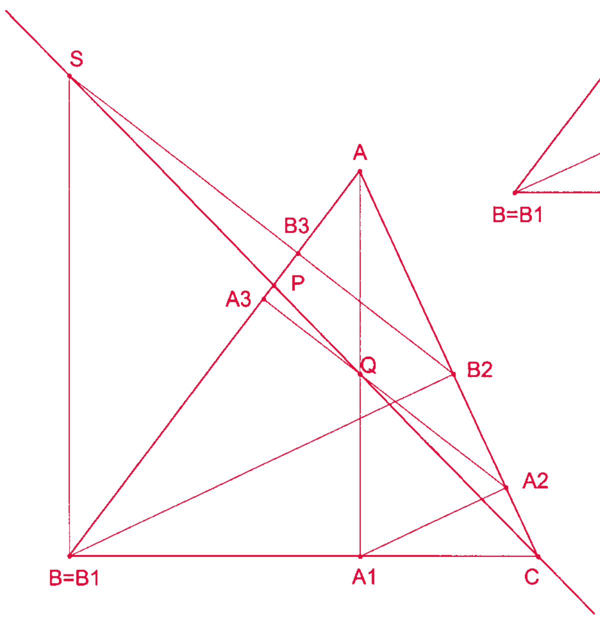
Immers: $\dfrac{PA_3}{PB_3} = \dfrac{PQ}{PS} = \dfrac{PA}{PB}$.

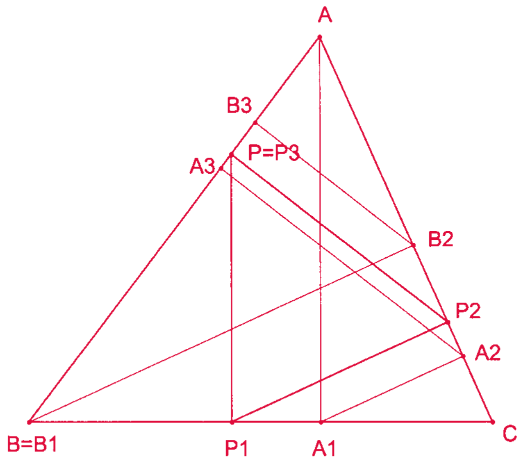
Het is duidelijk dat dit centrum van vermenigvuldiging P ook het gezochte sluitingspunt is bij een omloop van achtereenvolgende loodrechte projecties op de zijden van de driehoek, immers bij loodrechte projectie op de zijden van de driehoek blijven de verhoudingen

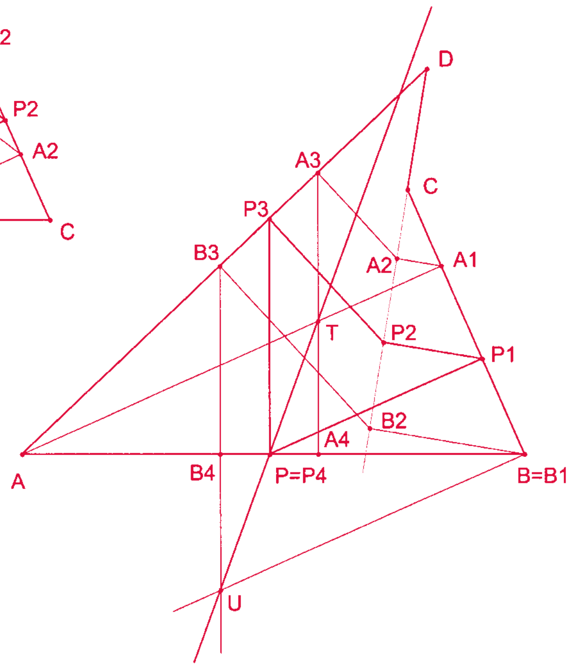
$\dfrac{PA}{PB}$, $\dfrac{P_1A_1}{P_1B_1}$, $\dfrac{P_2A_2}{P_2B_2}$ en $\dfrac{P_3A_3}{P_3B_3}$ ongewijzigd

(zie figuur 10). Dus $P = P_3$.

Door te kijken naar omlopen van lijnstukken in plaats van punten kwam de vaste vermenigvuldigingsfactor







FIGUUR 9 **FIGUUR 10** **FIGUUR 11**

in beeld. Deze zette ons op het spoor van het centrum van de puntvermenigvuldiging. Dit centrum blijkt het sluitingspunt te zijn.

Nu is het duidelijk

Bij de constructie van het sluitingspunt gaat het dus om het construeren van het centrum van puntvermenigvuldiging dat in de vorige paragraaf is beschreven. De *raadselachtige rechte* geeft zo'n constructie. De eenvoudige constructies van het sluitingspunt van driehoeken en van parallellogrammen zoals die in eerdere paragrafen zijn beschreven, gaan volgens hetzelfde algemene principe, maar daarbij wordt handig gebruik gemaakt van ontaardingen.

Het principe laat zich ook generaliseren tot een constructie voor willekeurige *n*-hoeken (zie figuur 11 voor de constructie bij een vierhoek). Hoe vaak je projecteert (al of niet loodrecht) op een volgende zijde maakt niet uit: de verhoudingen tussen de lengtes A_iP_i en P_iB_i blijven constant. Je hoeft zelfs niet eens bij iedere zijde onder dezelfde hoek te projecteren. Ook mag je willekeurig de volgorde van de zijden kiezen waarop je projecteert.

Het probleem lijkt nu wel volledig opgelost.

Of het mogelijkheden biedt voor een praktische opdracht? Dat laat ik aan het oordeel van de lezer over.

Met dank aan Leon van den Broek voor enkele wezenlijke bijdragen.

Noten

[1] O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, Epsilon Uitgaven, Utrecht (1987)

[2] Het kost nog wel wat werk om aan te tonen dat er inderdaad sprake is van een puntvermenigvuldiging. In het kader van dit artikel acht ik het echter niet passend om dat verder uit te werken.

Over de auteur

Lodewijk van Schalkwijk (e-mailadres: L.vanSchalkwijk@ils.kun.nl) is verbonden aan het Instituut voor Leraar en School/KU Nijmegen, en aan het Elzendaalcollege te Boxmeer.

ORTHOPTICA

Als een lijnsegment onder een hoek van 90° wordt gezien, ligt het oogpunt op een cirkel met dit segment als middellijn. Dat zegt de klassieke stelling van Thales.
Maar wat is de meetkundige plaats van het oogpunt bij een 'orthoptische blik' op andere figuren?

[Martin Kindt]

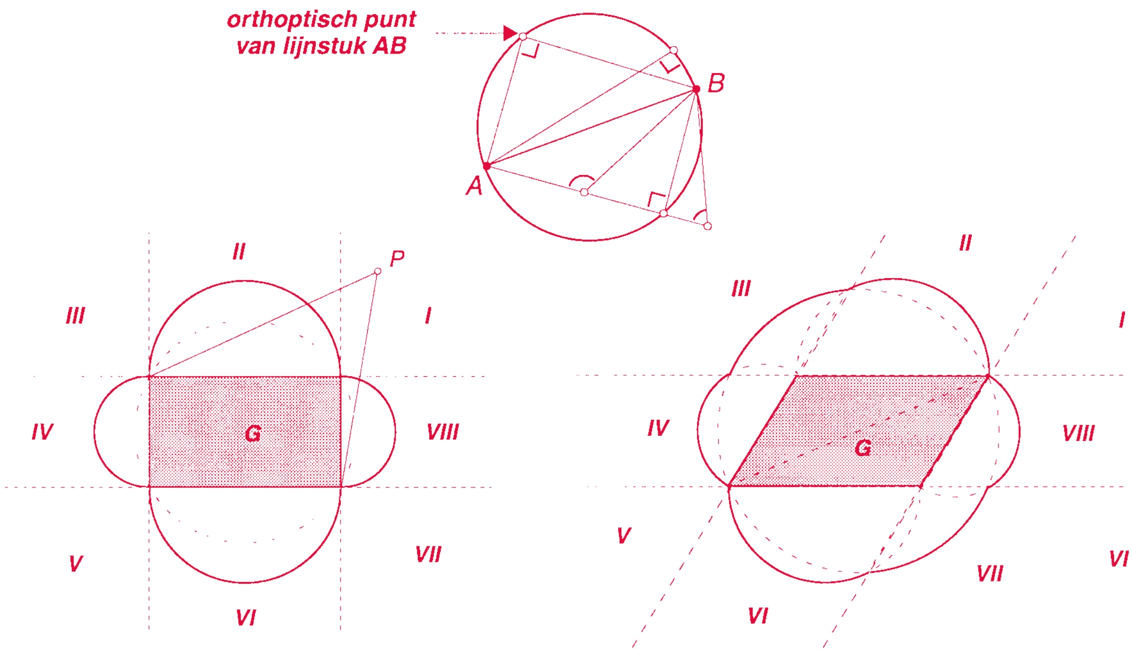
Orthoptische punten bij veelhoeken

Een van de alleroudste theorema's uit de vlakke meetkunde is ongetwijfeld de stelling die bij ons de naam van Thales draagt en die aldus kan worden verwoord: *de verzameling (meetkundige plaats van) punten van waaruit een gegeven lijnstuk AB wordt gezien onder een hoek van 90°, is de cirkel met middellijn AB*.
Om reden van de door Thales gesignaleerde eigenschap noem ik een punt van de cirkel met middellijn *AB* een *orthoptisch punt* van lijnstuk *AB* (zie figuur 1).
Ik merk nog op dat lijnstuk *AB* vanuit de punten buiten de zogenaamde orthoptische cirkel onder een scherpe en in de punten binnen die cirkel onder een stompe hoek wordt gezien. Dit alles is eenvoudig te bewijzen.

Als je op zee in de verte een streep eiland ontdekt, kun je meten onder welke hoek je die streep ziet. Is die hoek toevallig 90°, dan bevind je je in een orthoptisch punt van dat eiland. Vaar je nu rond het eiland zonder dat de kijkhoek verandert, dan volg je de *orthoptische kromme* van dat eiland. Bij strakke, mathematisch gevormde eilanden valt er misschien iets te zeggen over de orthoptische kromme.

Bekijk om te beginnen een rechthoekig eiland, genaamd *G*. De orthoptische kromme van *G* is eenvoudig te bepalen: zij bestaat uit vier halve 'Thalescirkels' (zie weer figuur 1).
De verklaring is niet moeilijk. In de gebieden *II, IV, VI* en *VIII* wordt één zijde van *G* gezien en daar is de stelling van Thales van toepassing; dat levert vier halve cirkels op. Vanuit punten in de hoekgebieden *I, III, V* en *VII* zijn twee zijden van *G* zichtbaar en dat vraagt nog wat bezinning. In de figuur is een punt *P* in het gebied *I* gekozen. De hoek waaronder *G* wordt gezien vanuit *P*, is zeker scherp. Immers, *P* ligt buiten de orthoptische cirkel van de diagonaal van *G* die de hoekpunten van *III* en *VII* verbindt en volgens een voorgaande opmerking is de kijkhoek in *P* dan scherp. Dit geldt uiteraard voor alle punten in de vier oneven genummerde gebieden.
Het wordt direct al wat leuker als *G* een scheef parallellogram is. In dat geval zijn er in twee van de vier hoekgebieden ook nog orthoptische punten te vinden; die punten liggen op cirkelbogen waarvan de langste diagonaal een middellijn is. In de vier andere gebieden liggen de orthoptische punten weer op de Thalescirkels van de zijden. De orthoptische kromme is nu een 'zeshoek' van cirkelbogen.

Bij andere convexe veelhoekige gebieden kunnen we analoog te werk gaan. Hoekpunten van scherpe of rechte hoeken liggen blijkbaar op bogen van de orthoptische verzameling; hoekpunten bij stompe hoeken liggen binnen het gebied dat door die bogen wordt begrensd. Bij regelmatige veelhoeken horen mooie orthoptische verzamelingen.
Figuur 2 toont die bij het eiland 'Pentagon'. De dragers van de zijden van de vijfhoek verdelen het vlak in vijftien gebieden. Die zijn aangeduid met 1, 2 of 3 al naar gelang vanuit die gebieden 1, 2 of 3 zijden van de vijfhoek zichtbaar zijn. De orthoptische punten in de gebieden met nummer 1 liggen op de Thalescirkels van



FIGUUR 1 Orthoptische krommen van rechthoek en parallellogram

de zijden van de vijfhoek. In de gebieden 2 zijn de orthoptische punten te vinden op de Thalescirkels van de diagonalen. In de vijf overblijvende gebieden worden drie zijden gezien, maar de kijkhoeken aldaar zijn scherp. De orthoptische kromme van de regelmatige vijfhoek bestaat dus uit tien cirkelboogjes.
Ik merk op dat bij een onderzoek naar orthoptische krommen bij veelhoeken met vrucht gebruik worden gemaakt van CABRI. Hier ligt een mogelijkheid voor een praktische opdracht voor vwo-leerlingen met wiskunde B12! Voorbeeld van een onderzoeksvraag: wat is het maximale aantal cirkelboogjes bij een vierhoekig, vijfhoekig, enz. gebied?

Orthoptische krommen van gebieden begrensd door kegelsneden

Het meest eenvoudige gebied dat wordt begrensd door een niet-ontaarde kegelsnede is de cirkelschijf. De verzameling orthoptische punten hierbij is een cirkel met een straal die $\sqrt{2}$ maal zo groot als de straal van de schijf (zie figuur 3, boven). De figuur spreekt voor zich. Belangrijk om te weten is dat de hoek waaronder een cirkelschijf wordt gezien vanuit een punt er buiten, wordt gevormd door de beide raaklijnen uit dat punt.
Nu een elliptisch gebied. In oude boeken over analytische meetkunde treft men soms de vraag naar de *meetkundige plaats der punten, waaruit men twee onderling loodrechte raaklijnen aan de ellips kan trekken.* De standaardoplossing van dit probleem is de volgende. Neem de ellips met vergelijking:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

De raaklijnen van de ellips met richtingscoëfficiënt m hebben dan de vergelijkingen:

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

De lezer kan dit verifiëren door $y = mx + p$ in te vullen in de vergelijking van de ellips, dan de discriminant van de zo ontstane vierkantsvergelijking gelijk te stellen aan 0, om daarna p uit te drukken in m. Voor raaklijnen die hier loodrecht op staan, geldt dan:

$$y=\frac{-1}{m}x\pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}$$

Herleiden we het viertal raaklijn-vergelijkingen tot:

$$y-mx=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

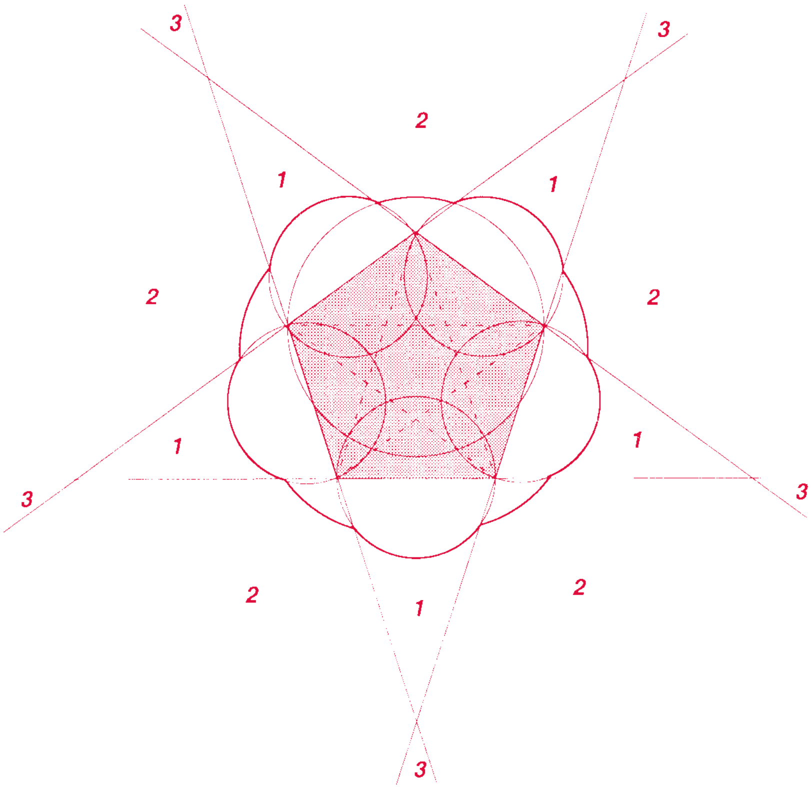
$$my+x=\pm\sqrt{a^2+b^2m^2}$$

dan kan m op de volgende elegante wijze worden geëlimineerd:

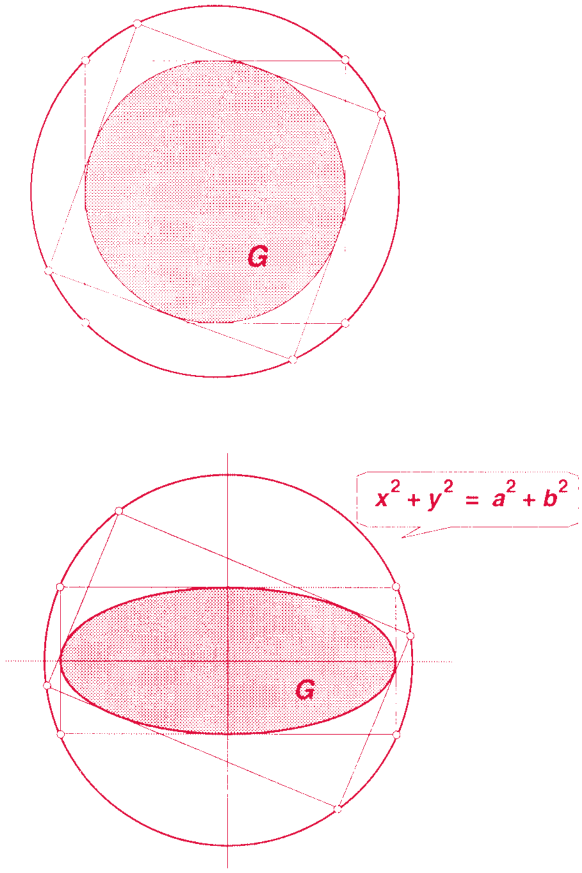
$$(y-mx)^2+(my+x)^2=a^2m^2+b^2+a^2+b^2m^2$$
$$(m^2+1)(x^2+y^2)=(m^2+1)(a^2+b^2)$$
$$x^2+y^2=a^2+b^2$$

Resultaat (zie figuur 3, onder): de gevraagde meetkundige plaats is een cirkel met middelpunt O en straal $\sqrt{a^2+b^2}$.

Dat de orthoptische kromme van de ellips een cirkel is, kan ook langs synthetische weg worden bewezen, al is



FIGUUR 2 Orthoptische kromme van de regelmatige vijfhoek



FIGUUR 3 Orthoptische cirkels van een cirkel- en een ellipsvormig gebied

dat niet zo simpel. Het is echter de moeite waard die weg te bewandelen en onderweg te genieten van het meetkundige landschap.
Als gids op die weg hoop ik het door Bottema in zijn inaugurele rede geciteerde woord van Lodewijk van Deyssel te logenstraffen, namelijk dat het warme beweren beter is dan het kille bewijzen (zie pagina 177).

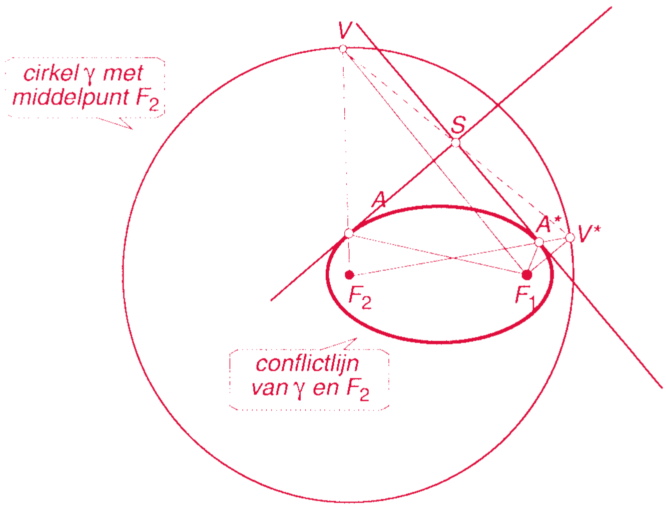
Synthetisch bewijs

In de afstandsmeetkunde die nu gangbaar is in de top van het vwo, past de opvatting dat de ellips de conflictlijn is van een cirkel ('richtcirkel') en een punt binnen die cirkel ('brandpunt'). In figuur 4 zijn de punten A en A^* conflictpunten van de cirkel γ en het punt F. Dat betekent:

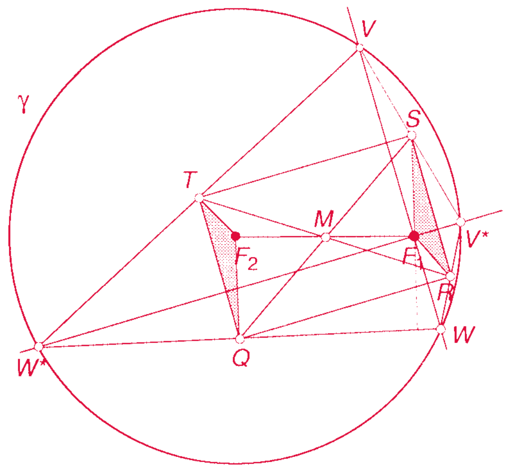
$|AV| = |AF_1|$ en $|A^*V^*| = |A^*F_1|$

De raaklijnen a in A en a^* in A^* aan de ellips zijn de middelloodlijnen van VF_1 en V^*F_1.
Stel nu dat a en a^* elkaar loodrecht snijden in S. Wat kan ik dan te weten komen van S?
Om te beginnen dit: S is, als snijpunt van de middelloodlijnen van VF_1 en V^*F_1, het middelpunt van de omgeschreven cirkel van driehoek VF_1V^*. Uit $a \perp a^*$ volgt dat ook $VF_1 \perp V^*F_1$ en dus is S juist het midden van het lijnstuk VV^*.
We laten nu de voetpunten V en V^* de cirkel γ doorlopen, maar wel zó dat VF_1 en V^*F_1 onderling loodrecht blijven.
Als ik nu kan bewijzen dat het midden S van VV^* een cirkel als spoor achterlaat, ben ik klaar. In vroeger tijden moest je dat spoor met je geestesoog zien te volgen, maar nu kun je met behulp van CABRI daar bewonderend naar kijken. Niet te lang natuurlijk, want het wordt tijd om hard te maken dat schijn niet bedriegt en, wezenlijker nog, om te begrijpen wat er aan de hand is.
Bekijk voor de volgende fase figuur 5; daarin zijn W en W^* de andere snijpunten van VF_1 en V^*F_1 met γ.

Als het waar is dat S een cirkel voortbrengt, dan zal dat steeds de omgeschreven cirkel van rechthoek $QRST$ zijn. Immers, uitgaande van een zekere beginsituatie, komt er een moment dat S op de plaats is, waar T in het begin was, enz. Het middelpunt van het spoor van S, zal dan dus het snijpunt van SQ en TR moeten zijn. Dit snijpunt is inderdaad een vast punt; het is namelijk het midden van F_1F_2. Dat kan op verschillende manieren worden bewezen, maar ik wil hier gebruik maken van een mooie oude stelling, namelijk die de naam draagt van de Indiër Brahmagupta. De stelling zegt: *als de diagonalen van een koordenvierhoek loodrecht op elkaar staan, dan staat de lijn die het midden van een zijde van die vierhoek verbindt met het snijpunt van de diagonalen, loodrecht op de overstaande zijde* (voor een bewijs zie het Profi-examen vwo 1998).
In figuur 5 staat SF_1 dan loodrecht op WW^*. Omdat QF_2 ook loodrecht staat op WW^* (want Q is midden van een koorde van een cirkel met middelpunt F) zijn SF_1 en Q_2F_2 evenwijdig.
Analoog volgt dat RF_1 en TF_2 evenwijdig zijn. En omdat bovendien RS // TQ en $|RS| = |QT|$, zijn de



FIGUUR 4 ***S* is het midden van *VV****



FIGUUR 5 ***SQ* en *TR* snijden elkaar op F_1F_2**

driehoeken RSF_1 en TQF_2 origineel en beeld bij een puntspiegeling. Het centrum van die puntspiegeling is het midden M van F_1F en dit punt is nu automatisch ook het snijpunt van SQ en RT.

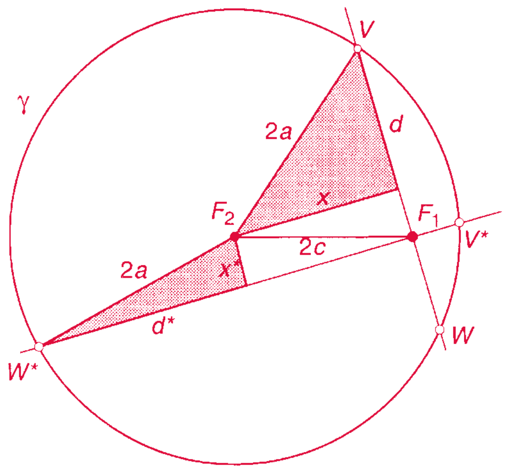
Tijdens de reis van V over γ verandert de rechthoek $RSTQ$ enigszins van vorm (in vier posities is zij zelfs vierkant), maar – zoals ik zal aantonen – de diagonaal verandert daarbij niet van lengte.
Het bewijs berust op de stelling van Pythagoras en (toch nog) een klein beetje algebra.
Zie nu figuur 6.
Stel $|VW| = 2d$ en $|V^*W^*| = 2d^*$.
Nu geldt: $|QS|^2 = |RS|^2 + |RQ|^2 = d^2 + d^{*2}$.
Stel verder $|F_1F_2| = 2c$, $2a$ = straal van γ,
afstand $(F_2, VW) = x$ en afstand $(F_2, V^*W^*) = x^*$.
Dan volgt:
$x^2 + x^{*2} = 4c^2$
$d^2 = 4a^2 - x^2$
$d^{*2} = 4a^2 - x^{*2}$
en daaruit
$d^2 + d^{*2} = 8a^2 - 4c^2$
De letters a en c zijn niet toevallig zo gekozen.
Wetende dat $2c$ de brandpuntsafstand van de ellips is en dat $2a$, als straal van de richtcirkel, gelijk is aan de lange as van de ellips, volgt
$a^2 = b^2 + c^2$
met $2b$ als de lengte van de korte as.
De vorm $8a^2 - 4c^2$ kan nu worden omgewerkt tot $4a^2 + 4b^2$, en dat is het kwadraat van de diameter van de langs analytische weg gevonden orthoptische cirkel.
Ik merk nog even op dat de grensgevallen $b = 0$ en $c = 0$ respectievelijk een lijnstuk en een cirkelschijf als gebied geven, en dat substitutie in bovenstaande formule een diameter van $2a$ respectievelijk $2a\sqrt{2}$ oplevert, hetgeen in overeenstemming is met eerder verkregen resultaten.

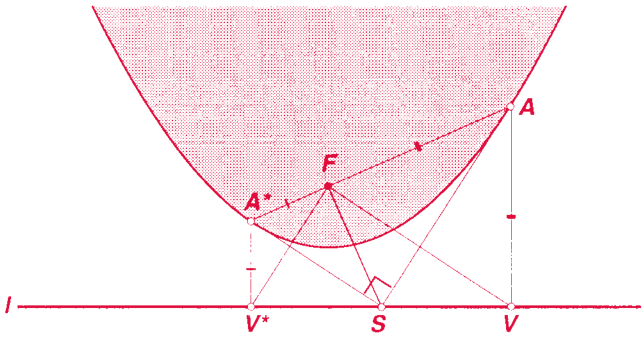
De beide andere typen kegelsneden leveren na dit alles weinig problemen op.
Bij de hyperbool zijn de orthoptische punten langs geheel analoge weg te vinden. In de analytische aanpak betekent dat, uitgaande van de hyperboolvergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

een aantal ‘plussen’ vervangen wordt door ‘minnen’, met als resultaat de orthoptische cirkel $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$.
Althans als $a > b$ ofwel als de hyperbool ligt in de beide scherphoekige gebieden, gevormd door zijn asymptoten.
Bij een orthogonale hyperbool ($a = b$) bestaat er slechts één orthoptisch punt, namelijk het snijpunt van de asymptoten; de voorgaande vergelijking stelt dan een puntcirkel voor.
Bij een ‘stomphoekige hyperbool’ zijn er geen reële orthoptische punten.
Dit alles kan ook op synthetische wijze worden gezien en het is een aardige oefening om het voorgaande bewijs voor de ellips zó aan te passen dat het van toepassing is op de hyperbool.

Tenslotte de parabool (**zie figuur 7**). Hiervan blijken de orthoptische punten een rechte lijn te vormen, namelijk de richtlijn van de parabool.





FIGUUR 6 $d^2 + d^{*2}$ **is constant**

FIGUUR 7 De orthoptische kromme van de parabool is de richtlijn

De raaklijnen a in A en a^* in A^* zijn weer de middelloodlijnen van FV en FV^*. Als die raaklijnen elkaar loodrecht snijden in S, dan moet S volgens dezelfde redenering als bij de ellips, het midden zijn van het lijnstuk dat de voetpunten V en V^* verbindt; dus S ligt op de richtlijn. Dat omgekeerd ieder punt van de richtlijn de rol van S kan spelen is eenvoudig na te gaan.

Verder onderzoek

De orthoptische verzamelingen die hier de revue zijn gepasseerd, zijn cirkels of samenstellingen van cirkelbogen. Goed, bij de parabool vonden we een rechte lijn, maar die kan desgewenst ook worden opgevat als een cirkel met een oneindige straal. Dat betekent niet dat er niet meer te koop is.
Bij een eiland in de vorm van een halve cirkel bestaat de orthoptische kromme uit twee cirkelbogen en twee bogen van een cardioïde! Ook bij andere cirkelsegmenten of sectoren komen stukjes cardioïde voor. En wat te de denken van een paraboolsegment? Zo is er nog van alles te onderzoeken, waarbij het gebruik van CABRI enorm kan helpen.

Bij een willekeurig eilandvorm, niet begrensd door een elementaire wiskundige figuur, is de orthoptische kromme langs experimentele weg te vinden. Neem twee punten op de omtrek van het eiland en beschouw de cirkel waarop die punten diametraal liggen. Laat vervolgens beide punten onafhankelijk van elkaar de omtrek doorlopen en beschouw de verzameling van alle zo verkregen cirkels. De omhullende daarvan zal de orthoptische kromme van het eiland zijn.
En wie de orthoptica als een te knellend keurslijf ervaart, kan het 'ortho-aspect' laten voor wat het is en studie maken van 'iso-kijkhoek-krommen'.

Over de auteur

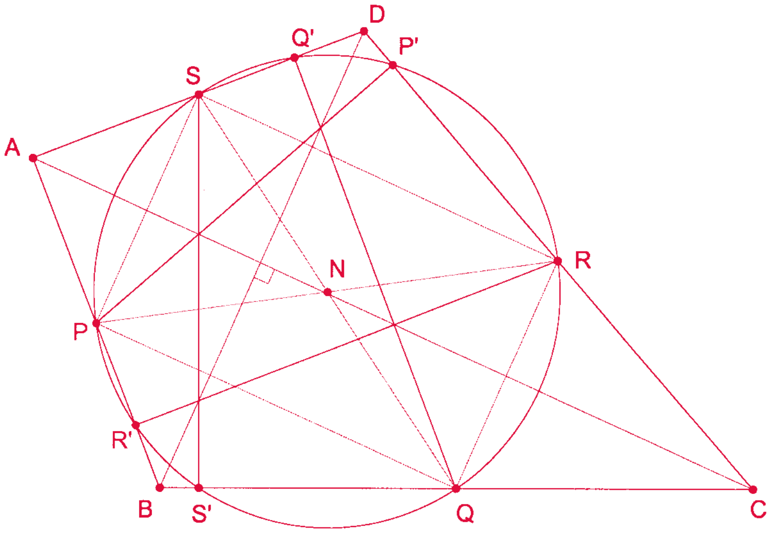
Martin Kindt (e-mail: M.Kindt@fi.uu.nl) is medewerker van het Freudenthal Instituut en docent aan de Hogeschool van Utrecht.

[…] Wilt mij daarom toestaan in dit uur enige opmerkingen te maken over wiskunde en wiskundeonderwijs in het algemeen, over hun betekenis en hun doel. Dat ontneemt U de bekoring, of verlost U van de verplichting of ontheft U van de last, om te luisteren naar een wiskundig betoog. Want spreken over wiskunde is ten duidelijkste geen wiskunde, al zou het alleen maar zijn hierom dat ik U geen definitie geef (en ook niet geven kan) van dit begrip, U niet voorstel bepaalde axioma's als grondslag van een redenering met mij te aanvaarden, noch met U afspreek of wij bepaalde logische figuren, zoals bijvoorbeeld het beginsel van het uitgesloten derde, al of niet geldig zullen verklaren. Waaruit U de conclusie kunt trekken, dat de woorden, die een wiskundige spreekt niet altijd met een ononderbroken keten van syllogismen corresponderen en dat dus de mathematisering of misschien zegt U vermathematisering van onze levensbeschouwing ook in zijn oog nog niet bepaald grote vorderingen heeft gemaakt; en hieruit volgt, dat ook hij de bekoring kan ondergaan van het woord van Van Deyssel, dat het warme beweren beter is dan het kille bewijzen.

De vraag: waarom wiskunde en waarom wiskundeonderwijs? is geen wiskundig, maar een psychologisch en maatschappelijk probleem en het antwoord heeft alle onzekerheid en onnauwkeurigheid, die de antwoorden op dergelijke vragen plegen te hebben. Het is ook niet vatbaar voor een afgerond bewijs, maar kan hoogstens door feiten en gevoelens worden toegelicht en daaraan kracht tot overtuiging ontlenen.

Het antwoord is ook niet eenduidig; er zijn verschillende motieven om wiskunde te onderwijzen en men is niet klaar met elk van deze te aanvaarden of te verwerpen, maar is genoodzaakt aan elk van hen een bepaald gewicht te hechten en aangezien wij hier niet met mathematische of physische, voor berekening of meting vatbare grootheden te doen hebben, kan alleen de op feiten en ervaringen steunende persoonlijke voorkeur beslissen. De motieven moeten niet alleen worden afgewogen tegenover motieven die er bestaan om iets anders dan wiskunde te onderwijzen, maar ook de betrekkelijke waardering van de motieven zelf is verschillend. En daaruit is naar mijn mening te verklaren, dat in ons land in de laatste decennia binnen de kring van hen, die overtuigd zijn van de buitengewone waarde van wiskundeonderwijs, een aantal meningsverschillen zijn ontstaan, waarop ik nog terug zal komen. […]

Uit: De dienst der wiskunde, *rede uitgesproken door Dr. O. Bottema bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de theoretische mechanica aan de Technische Hogeschool te Delft, op 30 september 1941.*

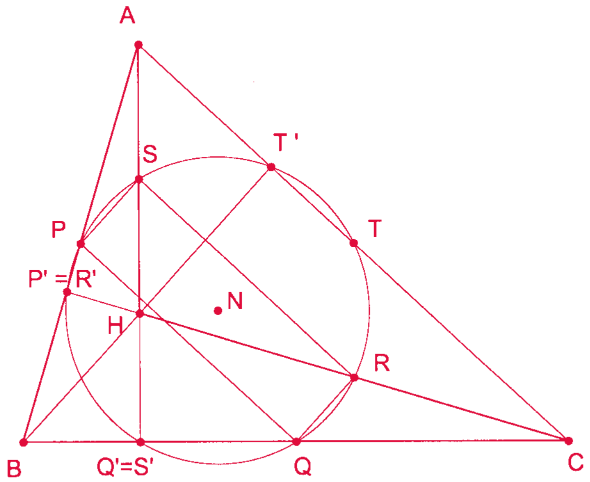


FIGUUR 1

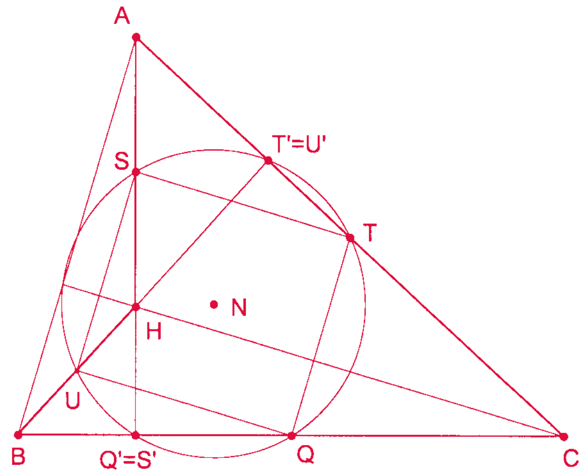
VAN ACHTPUNTS-, VIA ZESPUNTS-, NAAR NEGENPUNTSCIRKEL

De negenpuntscirkel en de rechte van Euler worden in een aantal artikelen in dit Bottema-nummer genoemd. Hieronder worden de bekendste eigenschappen van beide figuren op een wat andere manier afgeleid dan gebruikelijk [1].

[Dick Klingens]



FIGUUR 2



FIGUUR 3

Achtpuntscirkel

We gaan uit van een vierhoek *ABCD* waarvan de diagonalen *AC* en *BD* loodrecht op elkaar staan (zie figuur 1). Zouden we zo'n vierhoek *orthodiagonaal* mogen noemen?
Zoals bekend vormen de middens *P*, *Q*, *R*, *S* van de zijden van een vierhoek een parallellogram, dat soms genoemd wordt naar Pierre (de) Varignon (1654-1722). De zijden ervan zijn evenwijdig met de diagonalen van de vierhoek.
Het Varignon-parallellogram van een orthodiagonale vierhoek is dus een rechthoek. De middens van de zijden van *ABCD* liggen daardoor op een cirkel, die o.a. de lijnen *PR* en *QS* als middellijn heeft (en middelpunt *N*).
Overigens geldt een en ander ook voor een (niet zo gebruikelijke, maar later wel te gebruiken) niet-convexe vierhoek.

De hierboven bedoelde cirkel snijdt de zijden van de vierhoek (of de verlengden van die zijden) nog in vier andere punten: *P*', *Q*', *R*', *S*', die de projecties zijn van de punten *P*, *Q*, *R*, *S* op de daarbij behorende overstaande zijde van de vierhoek. Een en ander is gemakkelijk in te zien door de cirkel op te vatten als cirkel van Thales op (bijvoorbeeld) de middellijn *PR*, waaruit blijkt dat hoek *PP'R* gelijk is aan 90°.

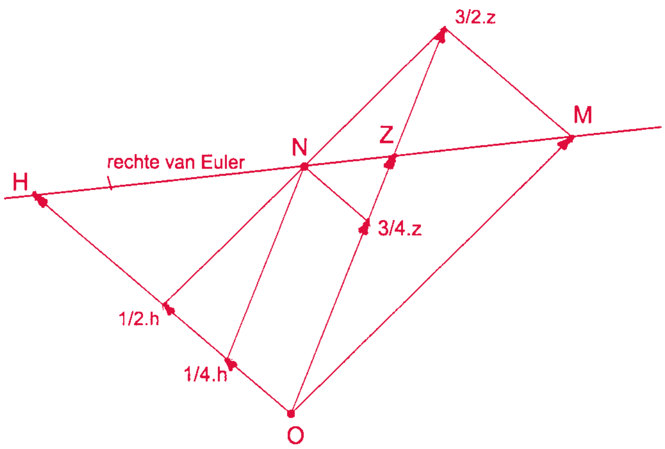
De cirkel noemen we de *achtpuntscirkel* van de orthodiagonale vierhoek.

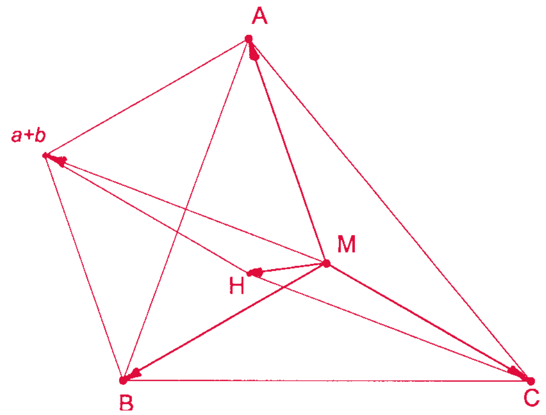
Zespunts- en negenpuntscirkel

In de figuren 2 en 3 is driehoek *ABC* getekend met de drie hoogtelijnen. Het hoogtepunt van de driehoek is het punt *H*.
We kijken nu naar de orthodiagonale vierhoek *ABCH* (in figuur 2). De achtpuntscirkel daarvan wordt ook nu bepaald door de punten *P*, *Q*, *R*, *S*.
Door de bijzondere stand van de paren overstaande zijden van *ABCH* is de achtpuntscirkel echter gereduceerd tot een *zespuntscirkel*.
De tot een zespuntscirkel gereduceerde achtpuntscirkel van een tweede orthodiagonale vierhoek (*BCAH* **in** figuur 3) gaat door drie van de eerder genoemde punten: *Q*, *S* en *S*'.
Beide genoemde zespuntscirkels vallen dus samen. De negen verschillende punten *P*, *P*', *Q*, *Q*', *R*, *S*, *T*, *T*' en *U* liggen dus op dezelfde cirkel: de *negenpuntscirkel* van driehoek *ABC*.

Rechte van Euler

De lijn door het middelpunt *N* van de negenpuntscirkel en het hoogtepunt *H* van driehoek ABC heet de *rechte van Euler*.
Ook het zwaartepunt *Z* van de driehoek ligt op de rechte van Euler [5].
We tonen dit aan met gebruikmaking van vectoren.
$p = \frac{1}{2}(a + b)$ en $r = \frac{1}{2}(c + h)$, zodat we hebben
$n = \frac{1}{2}(p + r) = \frac{1}{4}(a + b + c + h)$.
Voor het zwaartepunt van driehoek *ABC* geldt:
$z = \frac{1}{3}(a + b + c)$.
Uit de uitdrukkingen voor n en z vinden we dan:
$n = \frac{3}{4}z + \frac{1}{4}h$.





FIGUUR 4

FIGUUR 5

En hieruit volgt eenvoudig (zie figuur 4), dat het punt N op het lijnstuk HZ ligt, waarbij $HN : NZ = 3 : 1$.

Vergelijkingen van de middelloodlijnen van opvolgend BC en AB zijn, in vectornotatie:

$x = \frac{1}{2}(b + c) + \lambda(a - h)$ (i)

$x = \frac{1}{2}(a + b) + \mu(c - h)$ (ii)

Voor $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$, in (i) en (ii), vinden we voor het snijpunt M van beide middelloodlijnen:

$m = \frac{1}{2}(a + b + c) - \frac{1}{2}h$ (iii)

of

$m = \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}h$

waaruit blijkt (zie weer figuur 4), dat ook het middelpunt M van de omcirkel van driehoek ABC op de lijn van Euler ligt, en wel zo, dat $HN = NM$.

Dit laatste heeft tot gevolg, dat de resultante van de vectoren naar A, B en C die aangrijpen in het punt M, de vector naar het punt H is. Immers, $m = 0$ gesubstitueerd in uitdrukking (iii) geeft $h = a + b + c$, hetgeen voor het eerst gevonden is door James Joseph Sylvester (1814-1897) [3]; zie figuur 5.

Noten en literatuur

[1] O. Bottema, Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, Epsilon Uitgaven, Utrecht (1997), pp. 20-21

[2] Louis Brand, The Eight-Point Circle and the Nine-Point Circle, American Mathematical Monthly 51, pp. 84-85 (1944)

[3] H. Dörrie, 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Dover Publications, New York (1965)

[4] P. Wijdenes, Vlakke meetkunde voor voortgezette studie, P. Noordhoff N.V., Groningen (1964)

[5] Zie voor een andere eigenschap van de rechte van Euler het artikel van M.C. van Hoorn: Bottema en Veldkamp, in Euclides 77 (nr. 4, januari 2002), pp.128-134.

Over de auteur

Dick Klingens (e-mail: dklingens@pandd.demon.nl) is eindredacteur van Euclides en is als leraar wiskunde verbonden aan het Krimpenerwaard College te Krimpen aan den IJssel.

NAPOLEONS DRIEHOEKEN EN KIEPERTS PERSPECTORS

Voorbeeld van gebruik van complexe getallen in de meetkunde

In dit artikel gaan we Napoleons driehoeken en Kieperts perspectors generaliseren. Voor dit doel gebruiken we complexe getallen als coördinaten. Berekeningen met coördinaten zijn wellicht voor meetkundigen niet altijd zo bevredigend, zeker niet als voor de berekeningen een zwaar beroep moet worden gedaan op Computer Algebra Systemen, maar toch kunnen zij een hulpmiddel zijn en inzicht bieden. Wanneer gelijkbenige driehoeken in het spel betrokken worden, blijken complexe coördinaten eenvoudig in het gebruik.

[Floor van Lamoen]

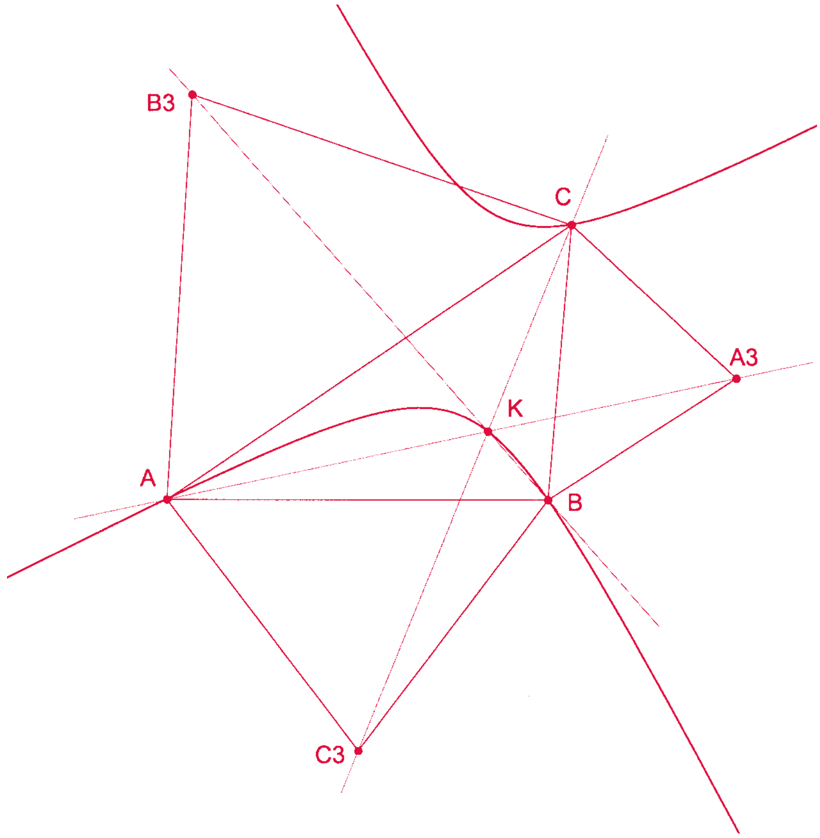
Perspector

In [1, XXVII] beschrijft O. Bottema het beroemde (eerste) *punt van Fermat-Torricelli* van een driehoek *ABC*. Dit punt wordt gevonden door buitenwaarts aan elk van de zijden van *ABC* een gelijkzijdige driehoek te plakken. De nieuwe hoekpunten vormen opnieuw een driehoek, zeg *A'B'C'*, die *perspectief* is met *ABC*, dat wil zeggen dat *AA'*, *BB'* en *CC'* door een gezamenlijk snijpunt gaan, de *perspector van ABC en A'B'C'*. Er is veel te vertellen over dit punt. Voor dit artikel is van belang dat de lijnen *AA'*, *BB'* en *CC'* onderlinge hoeken van 60° maken, en dat dit ook het geval is wanneer de driehoeken naar binnen worden gericht, wat het *tweede punt van Fermat-Torricelli* oplevert.
Het is welbekend dat, om een perspector op te leveren, de aan de zijden van *ABC* geplakte driehoeken niet gelijkzijdig hoeven te zijn. Het kunnen bijvoorbeeld gelijkbenige driehoeken met basishoek ϕ zijn, zoals Bottema meldt in [1, XI]. Met name Ludwig Kiepert bestudeerde deze driehoeken; de perspectors bij variërende ϕ blijken op een rechthoekige, naar Kiepert genoemde, hyperbool te liggen (zie figuur 1).
Meer over deze hyperbool kunt u lezen in de aan het eind van het artikel genoemde literatuur.
Het is echter al voldoende als de aangeplakte driehoeken georiënteerde hoeken hebben die voldoen aan $\angle BAC' = \angle CAB'$, $\angle ABC' = \angle CBA'$ en $\angle ACB' = \angle BCA'$.

Zijn de aangeplakte driehoeken gelijkzijdige driehoeken, dan is er nog een andere meetkundige aardigheid: de zwaartepunten van driehoeken *A'BC*, *AB'C* en *ABC'* vormen dan een driehoek die zelf weer gelijkzijdig is, een resultaat dat bekend staat als de *Stelling van Napoleon*. De driehoeken worden aangeduid als de *eerste* en *tweede driehoek van Napoleon* (voor het naar buiten en naar binnen gerichte geval), door Bottema [1, XI] beschreven zonder Napoleons naam eraan te verbinden (zie figuur 2a en figuur 2b). De perspectors van deze twee driehoeken met *ABC* heten het *eerste* en *tweede punt van Napoleon*.

De formule van een lijn in het complexe vlak

Complexe coördinaten zijn niet zo verschillend van de rechthoekige (x, y) – de twee as-richtingen zitten nu verpakt in één complex getal, dat we de *affix* van een punt noemen. Natuurlijk bestaat zo'n affix gewoon uit een reëel ('x') en een imaginair ('y') deel – het complexe getal $z = p + q \cdot i$ komt in feite overeen met het punt (p, q).
Hebben we $z = p + q \cdot i$, dan heet het getal $\bar{z} = p - q \cdot i$ de *complex geconjugeerde* van z. De combinatie van z en $\bar{z}$ wordt gebruikt om formules te maken. We hebben immers geen x en y meer!
Een parametervoorstelling van de lijn door de punten



FIGUUR 1 De hyperbool van Kiepert

met affices a_1 en a_2 is $z = a_1 + t(a_2 - a_1)$ waarbij t de reële getallen doorloopt. De complex geconjugeerde van deze parametervoorstelling is $\bar{z} = \bar{a}_1 + t(\bar{a}_2 - \bar{a}_1)$. Elimineert men t uit deze twee vergelijkingen, dan krijgt men de volgende formule voor de lijn door de punten met affices a_1 en a_2:

$$z(\bar{a}_1 - \bar{a}_2) - \bar{z}(a_1 - a_2) + (a_1\bar{a}_2 - \bar{a}_1 a_2) = 0.$$

Gelijkbenige driehoeken op een lijnstuk AB

Laat de punten A en B affices a en b hebben. We gaan op zoek naar de affix van het punt C dat van ABC een gelijkbenige driehoek met basishoek ϕ maakt met top C. Het midden van AB heeft affix $(a+b)/2$. De afstand van dit middelpunt tot C is gelijk aan $\frac{1}{2}\tan\phi \cdot |AB|$. Hiermee vinden we dat C als affix heeft:

$$c = \frac{a+b}{2} + i\tan\phi \cdot \frac{b-a}{2} = \frac{1 - i\tan\phi}{2}a + \frac{1 + i\tan\phi}{2}b = \bar{\chi}a + \chi b$$

waarbij $\chi = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\tan\phi$, zodat $\chi + \bar{\chi} = 1$.
Het bijzondere geval dat ABC gelijkzijdig is, levert voor χ de zesdemachts eenheidswortel

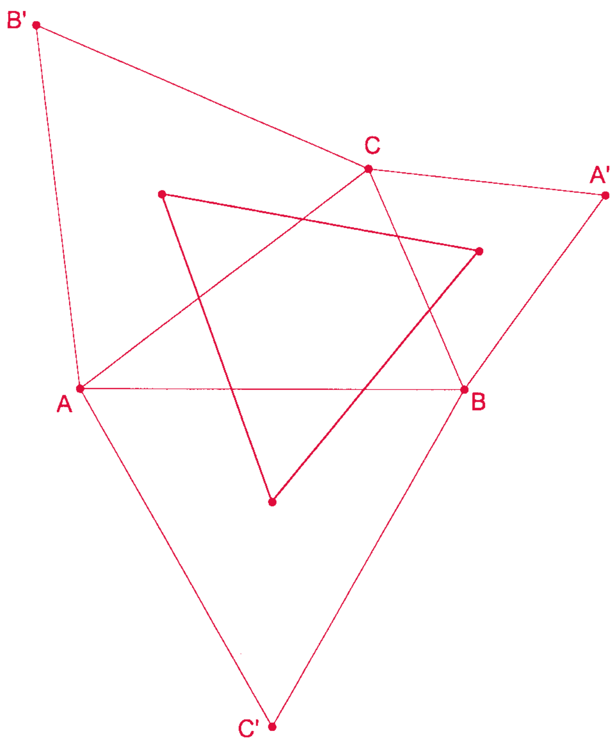
$$\zeta = \tfrac{1}{2} + \tfrac{i}{2}\sqrt{3} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

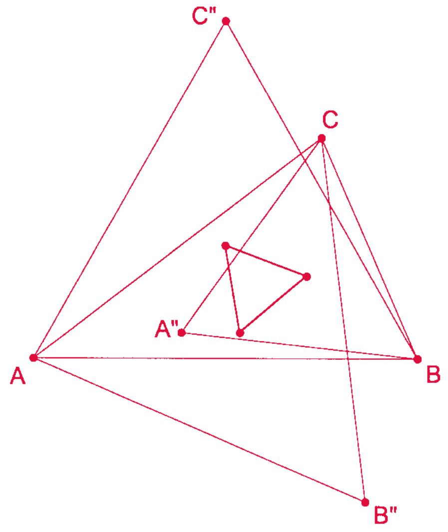
Dit getal ζ is een zesdemachts eenheidswortel, omdat hij voldoet aan $\zeta^6 = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$. Het getal voldoet ook aan $\zeta^3 = -1$ en $\zeta \cdot \bar{\zeta} = \zeta + \bar{\zeta} = 1$.
Men kan afhankelijk van de oriëntatie twee hoekpunten C vinden die met AB een gelijkzijdige driehoek maken, waarvoor respectievelijk $c = \zeta a + \bar{\zeta} b$ (negatieve oriëntatie) en $c = \bar{\zeta} a + \zeta b$ (positieve oriëntatie). Hieruit leidt men eenvoudig af:

Propositie 1: *De complexe getallen a, b en c zijn de affices van een gelijkzijdige driehoek dan en slechts dan als* $a + \zeta^2 b + \zeta^4 c = 0$ *voor positieve oriëntatie ofwel* $a + \zeta^4 b + \zeta^2 c = 0$ *voor negatieve oriëntatie.*

Napoleons driehoeken

We gaan de Stelling van Napoleon generaliseren door voort te bouwen op het idee van de zwaartepunten. Napoleons driehoeken werden immers gebouwd op een driehoek ABC door aan de zijden van die driehoek gelijkzijdige driehoeken te plakken, en daarvan de zwaartepunten te nemen. We gaan nu echter uit van twee driehoeken $A_kB_kC_k$ voor $k = 1, 2$ en bouwen op de verbindingslijnen tussen de A's, de B's en de C's de gelijkzijdige driehoeken. Hiermee lijken we iets heel anders te doen, maar de Stelling van Napoleon zal als bijzonder geval terugkeren als we uitgaan van driehoeken BCA en CAB.
We starten dus met twee driehoeken $A_kB_kC_k$ voor $k = 1, 2$ met affices a_k, b_k en c_k. De zwaartepunten Z_k





FIGUUR 2A Eerste driehoek van Napoleon

FIGUUR 2B Tweede driehoek van Napoleon

hebben affices $z_k = (a_k + b_k + c_k)/3$. We plakken nu aan de lijnstukken A_1A_2, B_1B_2 en C_1C_2 positief georiënteerde gelijkzijdige driehoeken met als derde hoekpunten $A_{3+}B_{3+}C_{3+}$. Evenzo vinden we $A_{3-}B_{3-}C_{3-}$ met negatief georiënteerde gelijkzijdige driehoeken. We vinden dat $a_{3+} = \zeta a_2 + \bar{\zeta} a_1$ en $a_{3-} = \zeta a_1 + \bar{\zeta} a_2$ en soortgelijke uitdrukkingen voor b_{3+}, b_{3-}, c_{3+} en c_{3-}. De zwaartepunten Z_{3+} en Z_{3-} hebben nu respectievelijk affices $z_{3+} = \zeta z_2 + \bar{\zeta} z_1$ en $z_{3-} = \zeta z_1 + \bar{\zeta} z_2$ waaruit volgt dat $Z_1Z_2Z_{3+}$ en $Z_1Z_2Z_{3-}$ gelijkzijdige driehoeken zijn van positieve, respectievelijk negatieve oriëntatie.

We gaan nu uit van de driehoeken:
- bepaald door de zwaartepunten D_+, E_+ en F_+ van driehoeken $B_1C_2A_{3+}$, $C_1A_2B_{3+}$ en $A_1B_2C_{3+}$ respectievelijk;
- bepaald door de zwaartepunten D_-, E_- en F_- van driehoeken $C_1B_2A_{3-}$, $A_1C_2B_{3-}$ en $B_1A_2C_{3-}$ respectievelijk.

We claimen nu de, voorzover wij weten niet eerder gepubliceerde, stelling:

Stelling 2: *Gegeven driehoeken $A_kB_kC_k$ en punten Z_k voor k = 1, 2, 3+, 3– en punten $D_\pm E_\pm F_\pm$ als hierboven. De driehoeken $D_+E_+F_+$ en $D_-E_-F_-$ zijn gelijkzijdig, van negatieve oriëntatie, congruent en parallel en hun zwaartepunten vallen samen met de zwaartepunten van $Z_1Z_2Z_{3+}$ en $Z_1Z_2Z_{3-}$ respectievelijk* (zie figuur 3).

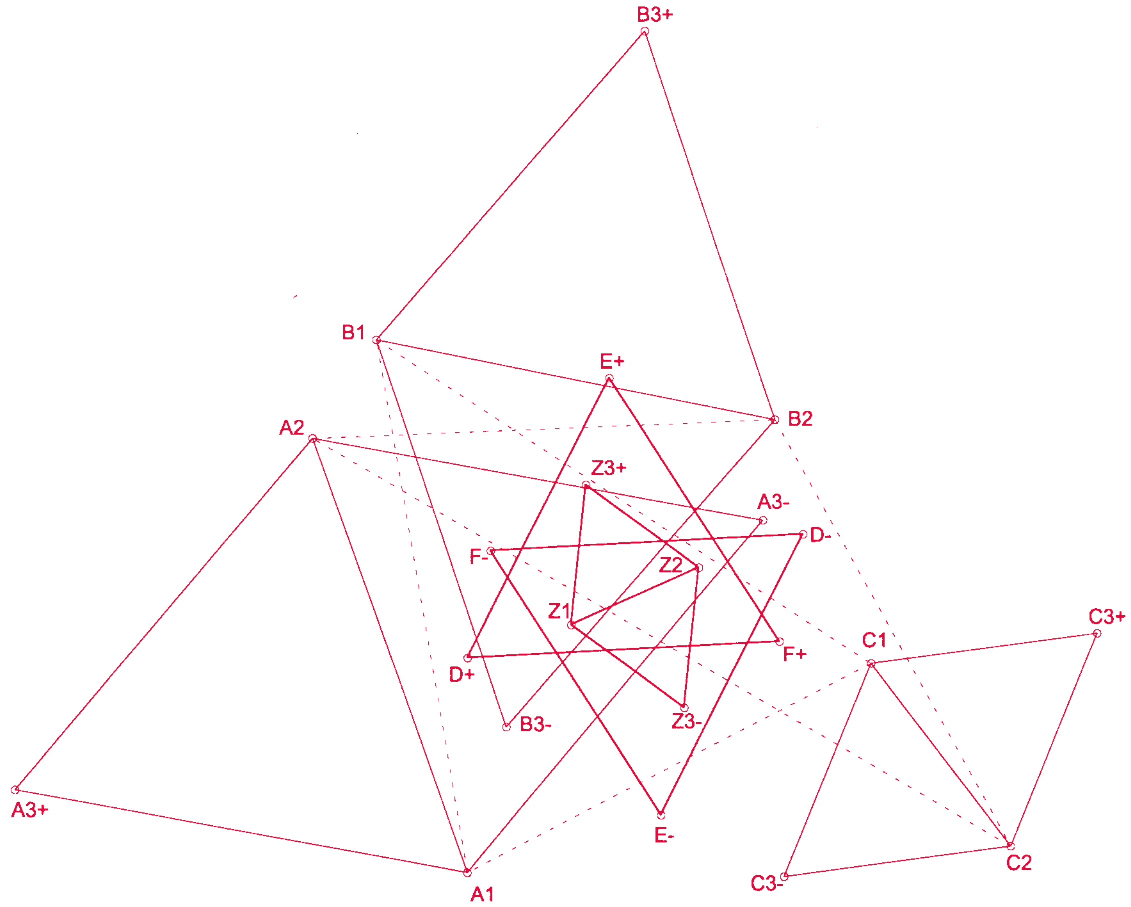
Om dit te bewijzen vinden we de volgende affices:

$$d_+ = (b_1 + c_2 + \zeta a_2 + \bar{\zeta} a_1)/3;\; e_+ = (c_1 + a_2 + \zeta b_2 + \bar{\zeta} b_1)/3;$$
$$f_+ = (a_1 + b_2 + \zeta c_2 + \bar{\zeta} c_1)/3;$$
$$d_- = (b_2 + c_1 + \zeta a_1 + \bar{\zeta} a_2)/3;\; e_- = (c_2 + a_1 + \zeta b_1 + \bar{\zeta} b_2)/3;$$
$$f_- = (a_2 + b_1 + \zeta c_1 + \bar{\zeta} c_2)/3.$$

Het is eenvoudig met Propositie 1 aan te tonen dat $D_+E_+F_+$ en $D_-E_-F_-$ gelijkzijdige negatief georiënteerde driehoeken zijn. Zo heeft $d_+ + \zeta^4 e_+ + \zeta^2 f_+$ als 'coëfficiënt' voor b_1 het getal $(1 + \zeta^4\bar{\zeta})/3 = 0$
Ook vinden we dat $d_+ - e_+ = e_- - d_- = \bar{\zeta}(a_1 - a_2) + \zeta(b_1 - b_2) + c_2 - c_1$, waaruit volgt dat D_+E_+ en D_-E_- gelijke lengte hebben en tegengesteld gericht zijn. Tenslotte is het eenvoudig na te gaan dat $(d_+ + e_+ + f_+)/3 = (z_1 + z_2 + z_{3+})/3$ en $(d_- + e_- + f_-)/3 = (z_1 + z_2 + z_{3-})/3$, waarmee Stelling 2 is bewezen. □

We kunnen een variatie maken van Stelling 2 als we voor de definitie van $D_\pm E_\pm F_\pm$ de rollen van $A_{3+}B_{3+}C_{3+}$ en $A_{3-}B_{3-}C_{3-}$ verwisselen. De rollen van Z_{3+} en Z_{3-} verwisselen dan ook, en de gevonden gelijkzijdige driehoeken hebben dan positieve oriëntatie.

We merken op: als de zwaartepunten Z_1 en Z_2 samenvallen, dan vallen zij samen met Z_{3+} en Z_{3-}, zodat $D_+E_-F_+D_-E_+F_-$ een regelmatige zeshoek wordt,



FIGUUR 3 De figuur van Stelling 2

waarvan het zwaartepunt met de zwaartepunten Z_1 en Z_2 samenvalt.

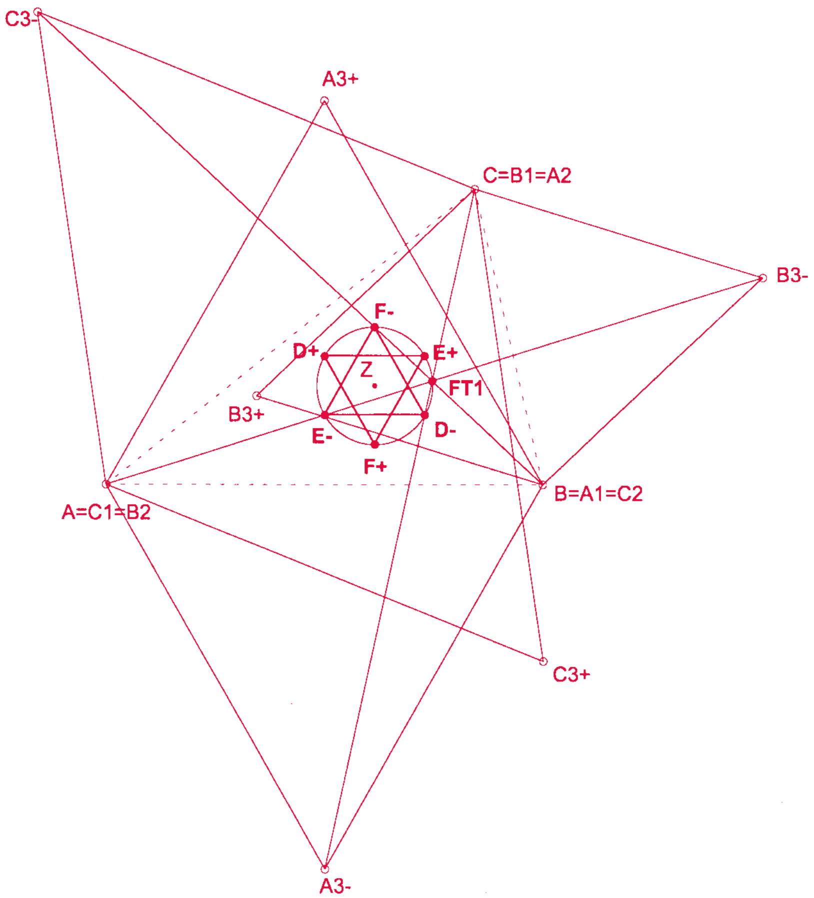
De Stelling van Napoleon is een bijzonder geval. Neemt men $A_1B_1C_1 = BCA$ en $A_2B_2C_2 = CAB$, dan is $D_+E_+F_+$ de *tweede* driehoek van Napoleon, en blijkt gelijkzijdig. We krijgen als bonus dat $D_+E_-F_+D_-E_+F_-$ een regelmatige zeshoek is. Nu is D_- het zwaartepunt van AAA_{3-}, dat wil zeggen dat D_- op AA_{3-} ligt en dat $AD_- : D_-A_{3-} = 1 : 2$. Soortgelijke definities vinden we ook voor E_- en F_-. De driehoeken ABC en $A_{3-}B_{3-}C_{3-}$ hebben het eerste punt van Fermat-Torricelli FT_1 als perspector, en de lijnen AA_{3-}, BB_{3-} en CC_{3-} maken hoeken van 60° met elkaar. Daarmee is eenvoudig in te zien (gelijke omtrekshoeken) dat FT_1 op de omgeschreven cirkel van $D_-E_-F_-$ en dus ook op die van $D_+E_+F_+$ moet liggen (zie figuur 4).
Op dezelfde wijze, nu gebruikmakend van de variatie op Stelling 2, is in te zien dat het tweede punt van Fermat-Torricelli moet liggen op de omgeschreven cirkel van de eerste driehoek van Napoleon.

Kieperts perspectors

Voor het generaliseren van Kieperts perspectors gaan we ook uit van twee driehoeken, die we ter onderscheid met Stelling 2, waarin we werkten met indices, *ABC* en *A'B'C'* zullen noemen. Deze twee driehoeken nemen we direct congruent (dus *A* correspondeert met *A'*, enz.) en van gelijke oriëntatie. Dit betekent dat de driehoeken op elkaar kunnen worden afgebeeld door een combinatie van rotatie en translatie (in feite is een van beide voldoende). We plakken nu de gelijkbenige driehoeken weer aan diverse verbindingslijnen tussen *ABC* en *A'B'C'*. Hadden we voor Kieperts perspectors een lijn van *A* naar de top van een gelijkbenige driehoek op *BC*, nu gaan we naar de top van een gelijkbenige driehoek op *CB'* en laten de rol van *A* overnemen door de top van een gelijkbenige driehoek op *AA'*. Dit levert de volgende, voorzover wij weten eveneens nieuwe, stelling:

Stelling 3: *Gegeven twee direct congruente driehoeken ABC en A'B'C' van gelijke oriëntatie. Plakken we aan de lijnstukken AA', BB', CC', CB', AC' en BA' gelijkvormige en gelijkgeoriënteerde gelijkbenige driehoeken met als toppen respectievelijk AA'', B'', C'' en A''', B''' en C''', dan gaan de lijnen A''A''', B''B''' en C''C''' door een gezamenlijk snijpunt; dus de driehoeken A''B''C'' en A'''B'''C''' zijn perspectief* (zie figuur 5).

We nemen voor de hoekpunten van *A*, *B* en *C* de affices *a*, *b* en *c*. Omdat driehoeken *ABC* en *A'B'C'*



FIGUUR 4 Het eerste punt van Fermat-Torricelli (FT1) ligt op de omcirkel van de tweede Napoleon-driehoek

direct congruent en van gelijke oriëntatie zijn, krijg je *A'B'C'* door op *ABC* een rotatie om de oorsprong toe te passen, gevolgd door een translatie. Deze rotatie om de oorsprong komt precies overeen met een vermenigvuldiging met een getal τ dat op de eenheidscirkel ligt, en dus voldoet aan $\tau\bar{\tau}=1$. De translatie kunnen we vertalen in een optelling met een getal σ. Daarmee zijn de affices van *A'*, *B'* en *C'* de getallen $\tau a+\sigma$, $\tau b+\sigma$ en $\tau c+\sigma$.

Nemen we voor de basishoek van de gelijkbenige driehoeken weer ϕ, en $\chi=\frac{1}{2}+\frac{i}{2}\tan\phi$, dan is de affix voor punt *A''* gelijk aan $(\bar{\chi}+\chi\tau)a+\chi\sigma$. Voor *A'''* vinden we $\bar{\chi}c+\chi\tau b+\chi\sigma$. De vergelijking van de lijn *A''A'''* kunnen we nu met wat doorzettingsvermogen vinden:

$$(\chi\bar{a}+\overline{\chi\tau a}-\chi\bar{c}-\overline{\chi\tau b})z-(\bar{\chi}a+\chi\tau a-\bar{\chi}c-\chi\tau b)\bar{z}+$$
$$+(\bar{\chi}+\chi\tau)a(\chi\bar{c}+\overline{\chi\tau b})+\chi\sigma(\chi\bar{c}+\overline{\chi\tau b})+\overline{\chi\sigma}(\bar{\chi}+\chi\tau)a+$$
$$-(\chi+\overline{\chi\tau})\bar{a}(\bar{\chi}c+\chi\tau b)-\overline{\chi\sigma}(\bar{\chi}c+\chi\tau b)-\chi\sigma(\chi+\overline{\chi\tau})\bar{a}=0$$

Op dezelfde wijze vinden we de vergelijkingen voor *B''B'''*:

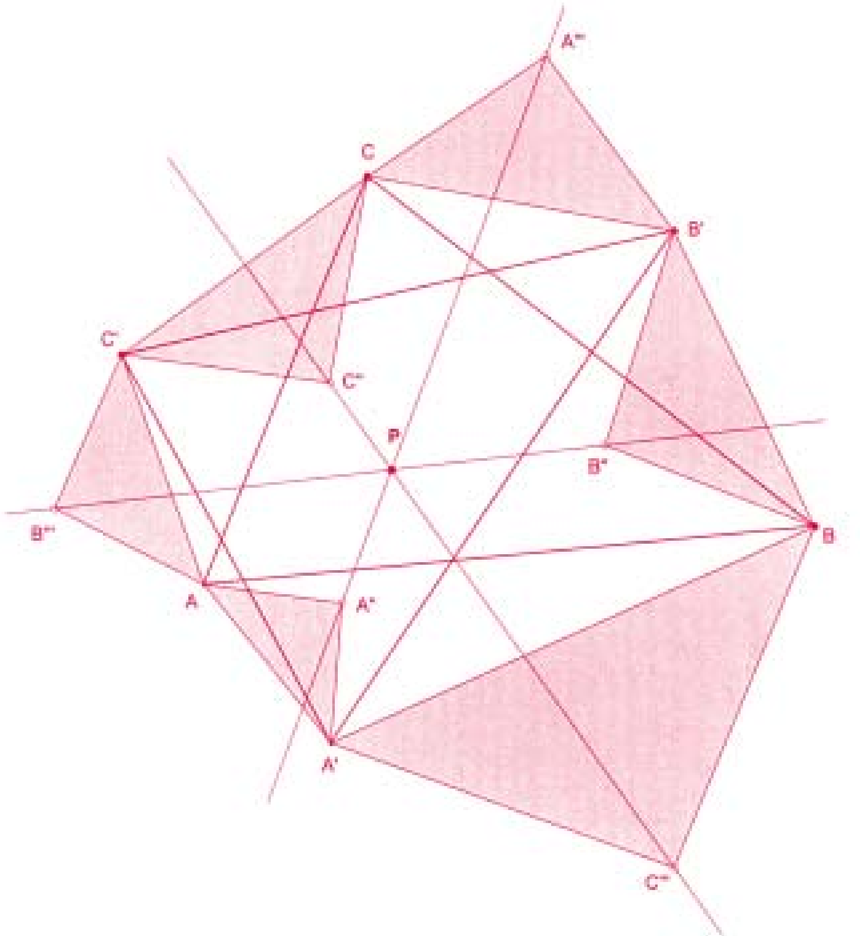
$$(\chi\bar{b}+\overline{\chi\tau b}-\chi\bar{a}-\overline{\chi\tau c})z-(\bar{\chi}b+\chi\tau b-\bar{\chi}a-\chi\tau c)\bar{z}+$$
$$+(\bar{\chi}+\chi\tau)b(\chi\bar{a}+\overline{\chi\tau c})+\chi\sigma(\chi\bar{a}+\overline{\chi\tau c})+\overline{\chi\sigma}(\bar{\chi}+\chi\tau)b+$$
$$-(\chi+\overline{\chi\tau})\bar{b}(\bar{\chi}a+\chi\tau c)-\overline{\chi\sigma}(\bar{\chi}a+\chi\tau c)-\chi\sigma(\chi+\overline{\chi\tau})\bar{b}=0$$

en voor *C''C'''*:

$$(\chi\bar{c}+\overline{\chi\tau c}-\chi\bar{b}-\overline{\chi\tau a})z-(\bar{\chi}c+\chi\tau c-\bar{\chi}b-\chi\tau a)\bar{z}+$$
$$+(\bar{\chi}+\chi\tau)c(\chi\bar{b}+\overline{\chi\tau a})+\chi\sigma(\chi\bar{b}+\overline{\chi\tau a})+\overline{\chi\sigma}(\bar{\chi}+\chi\tau)c+$$
$$-(\chi+\overline{\chi\tau})\bar{c}(\bar{\chi}b+\chi\tau a)-\overline{\chi\sigma}(\bar{\chi}b+\chi\tau a)-\chi\sigma(\chi+\overline{\chi\tau})\bar{c}=0.$$

We moeten nog even verder zweten door te kijken wat er gebeurt als we deze drie vergelijkingen bij elkaar optellen. Gelukkig wordt de moeite beloond, omdat we dan ontdekken dat de optelling van de drie formules $0=0$ oplevert. De drie vergelijkingen zijn afhankelijk van elkaar, de lijnen snijden elkaar dus in een punt. Daarmee is Stelling 3 bewezen. □

We moeten eindigen met een tegenvaller. Na de noeste berekeningen zouden we graag willen dat de gegeneraliseerde Kiepert-perspectors voor verschillende waarden van ϕ weer een rechthoekige hyperbool zouden doorlopen. Dit blijkt echter niet het geval te zijn.
Waaruit maar weer eens blijkt dat de meetkundige wereld mooi in elkaar zit, maar niet altijd zo eenvoudig als men even hoopt.



FIGUUR 5 De gegeneraliseerde Kiepert-perspector volgens Stelling 3

Literatuur

[1] O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, Epsilon, Utrecht (2e druk, 1987)

[2] H.S.M. Coxeter, S.L. Greitzer: Geometry Revisited, MAA, Washington DC (1967)

[3] D. Klingens: Homepage, http://www.pandd.demon.nl/meetkunde.htm (klik op 'Kiepert')

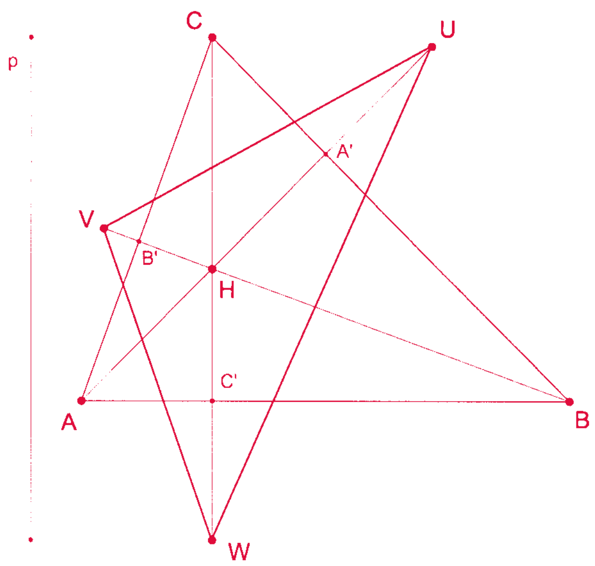
[4] F.M. van Lamoen, P. Yiu: The Kiepert Pencil of Kiepert Hyperbolas, Forum Geometricorum 1 (2001), pp. 125-132 (zie http://forumgeom.fau.edu/)

[5] E. Weisstein: Eric Weisstein's World of Mathematics, http://mathworld.wolfram.com/ (zoek naar 'Napoleon', 'Kiepert', enz.)

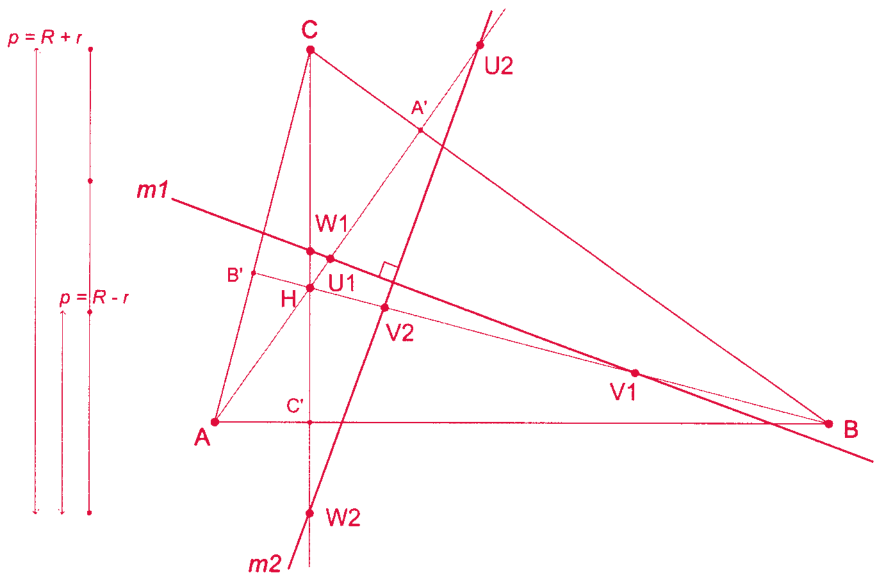
[6] D. Wells: The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry, Penguin London (1991)

Over de auteur

Floor van Lamoen (Statenhof 3, 4463 TV Goes, e-mailadres: f.v.lamoen@wxs.nl) is leraar wiskunde op het St. Willibrordcollege te Goes. Ook is hij redacteur van het op elementaire meetkunde gerichte electronische tijdschrift Forum Geometricorum (zie http://forumgeom.fau.edu/).
Zijn vader zat in de klas bij Rinze Bottema, zoon van Oene Bottema.



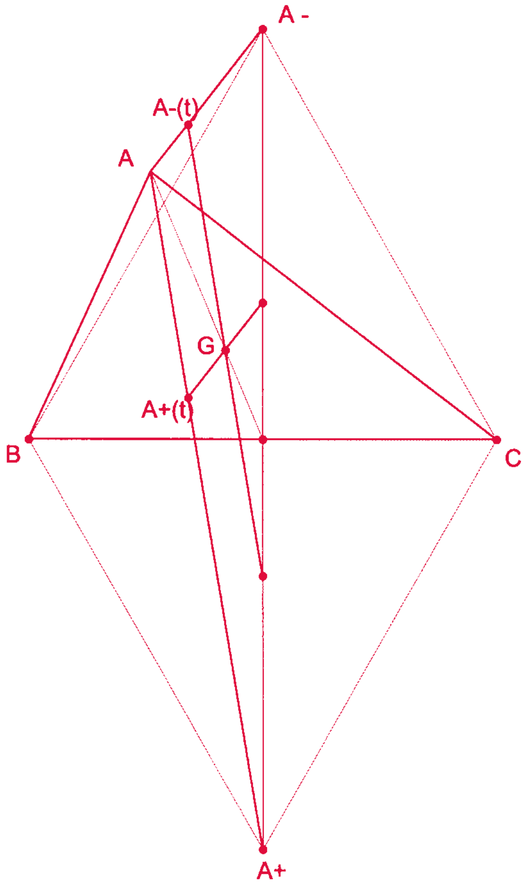
FIGUUR 1



FIGUUR 2

OVER DE LIJNEN VAN FERMAT

[Paul Yiu [n1]]



FIGUUR 3

1. Lijnen van Fermat

Dit artikel is een variatie op een thema van Bottema [2]. Bottema bestudeerde de driehoeken die gevormd worden door drie punten, ieder op een hoogtelijn van een gegeven driehoek, op gelijke afstanden (p) van de respectievelijke hoekpunten, zoals UVW in figuur 1. Hij vond vele interessante eigenschappen van zulke driehoeken. Als de drie punten gekozen worden op afstanden $p = R + r$ of $p = R - r$, waarbij R de straal van de om- en r van de ingeschreven cirkel is, dan zijn de drie punten collineair. De twee lijnen die dan gevormd worden, staan loodrecht op elkaar (zie figuur 2).

In plaats van de hoogtelijnen nemen wij de lijnen van Fermat - dat zijn de lijnen die de hoekpunten van de gegeven driehoek ABC verbinden met de top van een gelijkzijdige driehoek die geconstrueerd is op de overliggende zijde van A, B en C. Wij noemen deze gelijkzijdige driehoeken BCA_e, CAB_e en ABC_e, waarbij $e = +1$ voor de buitenwaarts en $e = -1$ voor de binnenwaarts gerichte driehoeken. Er zijn zes van dergelijke verbindingslijnen, AA_+, AA_-, ... De reden om deze lijnen te kiezen is dat, voor $e = \pm 1$, de lijnstukken AA_e, BB_e en CC_e gelijke lengtes hebben, gegeven door

$$\tau_e^2 = \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + e \cdot 2\sqrt{3} \cdot \Delta,$$

waarbij a, b en c de lengtes van de zijden, en Δ de oppervlakte van ABC is (zie bijvoorbeeld [1, XXVII.3]). Het is welbekend dat de drie lijnen van Fermat AA_e, BB_e en CC_e elkaar snijden in het e-punt van Fermat F_e onder hoeken van 60º [n2]. De middelpunten van de gelijkzijdige driehoeken BCA_e, CAB_e en ABC_e vormen de gelijkzijdige e-driehoek van Napoleon (zie ook het artikel van Floor van Lamoen in dit nummer, pp.182-187). De omgeschreven cirkel van de e-driehoek van Napoleon heeft het zwaartepunt G als middelpunt en heeft een straal van $\frac{\tau_e}{3}$. De straal kan worden afgeleid uit de formule voor de lengte l_e van de zijde van de e-driehoek van Napoleon, zoals gegeven door Bottema in [1, XI.1], $l_e^2 = \frac{1}{6}(a^2 + b^2 + c^2 + e \cdot 4\sqrt{3} \cdot \Delta)$.

2. De driehoeken $T_e(t)$

We zullen de punten op de Fermat-lijnen weergeven met hun afstanden van de corresponderende hoekpunten van ABC, positief in de richting van respectievelijk A_e, B_e en C_e, anders negatief. Dus, $A_+(t)$ is het unieke punt X op de positieve lijn van Fermat AF_+ zodat $AX = t$. In het bijzonder

$A_e(\tau_e) = A_e,\quad B_e(\tau_e) = B_e,\quad C_e(\tau_e) = C_e.$

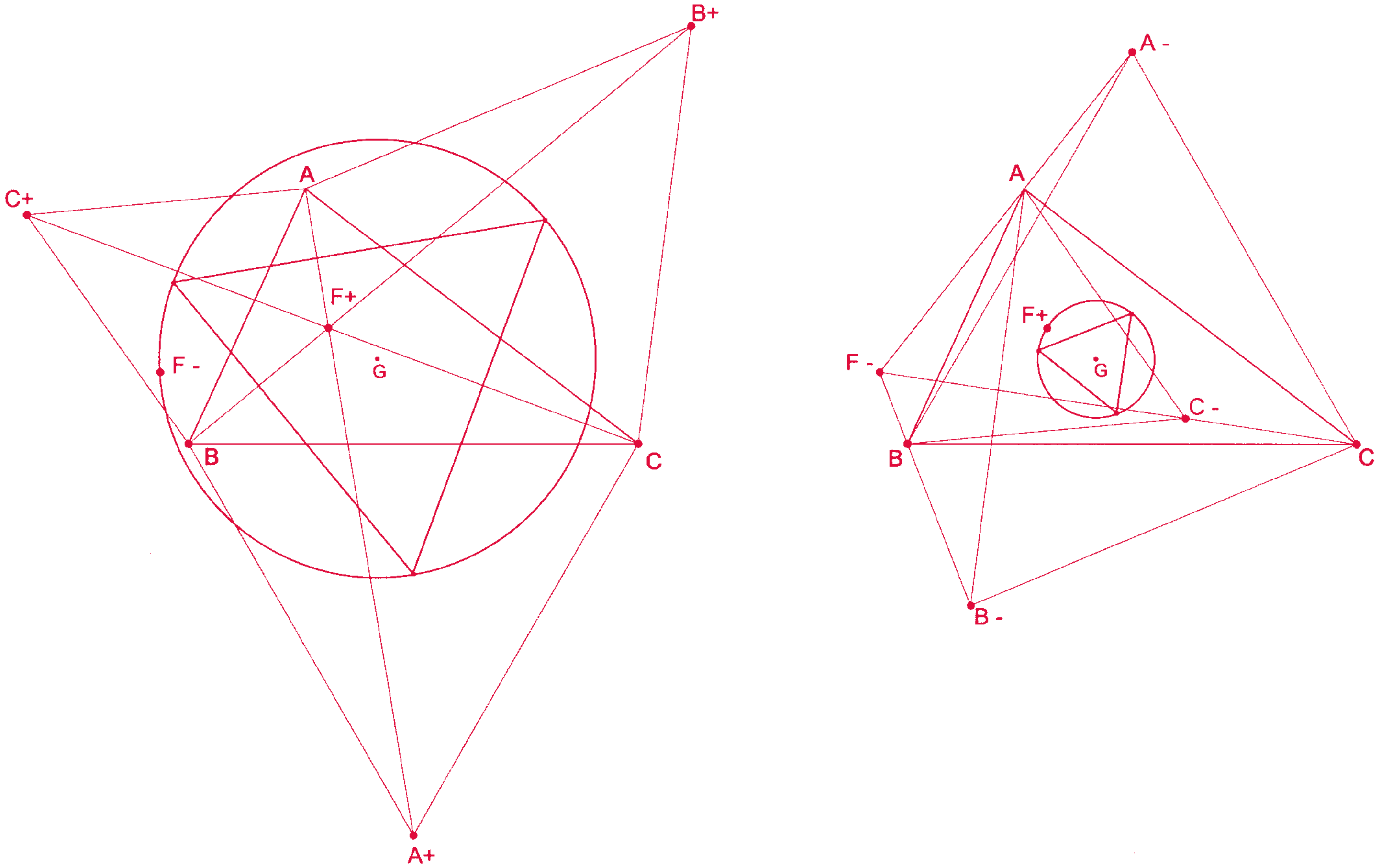
We zijn in dit artikel vooral geïnteresseerd in driehoeken $T_e(t)$ waarvan de hoekpunten $A_e(t)$, $B_e(t)$ en $C_e(t)$ zijn, voor verschillende waarden van t.

We maken enkele eenvoudige observaties:

(1) Het zwaartepunt van AA_+A_- is gelijk aan het zwaartepunt G van ABC, omdat de middens van BC en A_+A_- samenvallen.

(2) De middelpunten van de gelijkzijdige driehoeken BCA_+ en BCA_- delen het lijnstuk A_+A_- in drie gelijke stukken. Daarom is het lijnstuk van $A_e(\frac{\tau_e}{3})$ naar het middelpunt van BCA_{-e} evenwijdig aan de lijn van Fermat AA_{-e} en heeft het G als midden.

(3) Dit betekent dat $A_e(\frac{\tau_e}{3})$ het spiegelbeeld is van het A-hoekpunt van de (-e)-driehoek van Napoleon in G (zie figuur 3). Dit is ook zo voor de punten $B_e(\frac{\tau_e}{3})$ en $C_e(\frac{\tau_e}{3})$.



FIGUUR 4

(4) Hieruit volgt dat de driehoek $T_e(\frac{\tau_e}{3})$ het spiegelbeeld is in G van de (-e)-driehoek van Napoleon, en dus gelijkzijdig.
(5) De omgeschreven cirkel van de (-e)-driehoek van Napoleon en $T_e(\frac{\tau_e}{3})$ heeft straal $\frac{\tau_{-e}}{3}$ en middelpunt G (zie de laatste regels van paragraaf 1). Eenvoudig is nu in te zien, gebruik makend van gelijke omtrekshoeken, dat deze cirkel ook gaat door het punt van Fermat F_e (zie figuur 4).
(6) We zagen zojuist bij (5) dat $GA_e(\frac{\tau_e}{3}) = \frac{\tau_{-e}}{3}$. Dit is gevisualiseerd in figuur 5. We kunnen de rollen van $A_e(\frac{\tau_e}{3})$ en G omdraaien, zodat G ligt op de cirkel met straal $\frac{\tau_{-e}}{3}$ en middelpunt $A_e(\frac{\tau_e}{3})$ (zie figuur 6). Op deze cirkel liggen natuurlijk ook de punten $A_e(\frac{\tau_e + \tau_{-e}}{3})$ en $A_e(\frac{\tau_e - \tau_{-e}}{3})$, en hun verbindingslijnstuk is een diameter van de cirkel met middelpunt $A_e(\frac{\tau_e}{3})$ door G, zodat $GA_e(\frac{\tau_e + \tau_{-e}}{3})$ en $GA_e(\frac{\tau_e - \tau_{-e}}{3})$ loodrecht op elkaar staan; zie figuur 7, die een verfijning is van figuur 6. Evenzo staan $GB_e(\frac{\tau_e + \tau_{-e}}{3})$ en $GB_e(\frac{\tau_e - \tau_{-e}}{3})$ loodrecht op elkaar, evenals $GC_e(\frac{\tau_e + \tau_{-e}}{3})$ en $GC_e(\frac{\tau_e - \tau_{-e}}{3})$.

3. Collineariteit

Interessant is, dat deze 6 paren van lijnen dezelfde rechte hoeken bij G maken. Dit is te zien bij nadere beschouwing van figuur 6. Meer specifiek, de zes punten

$$A_+(\frac{\tau_+ + \tau_-}{3}), B_+(\frac{\tau_+ + \tau_-}{3}), C_+(\frac{\tau_+ + \tau_-}{3}), A_(\frac{\tau_+ + \tau_-}{3}), B_(\frac{\tau_+ + \tau_-}{3}),$$
$$C_(\frac{\tau_+ + \tau_-}{3})$$

liggen op één lijn met G.
Hetzelfde geldt voor de zes punten

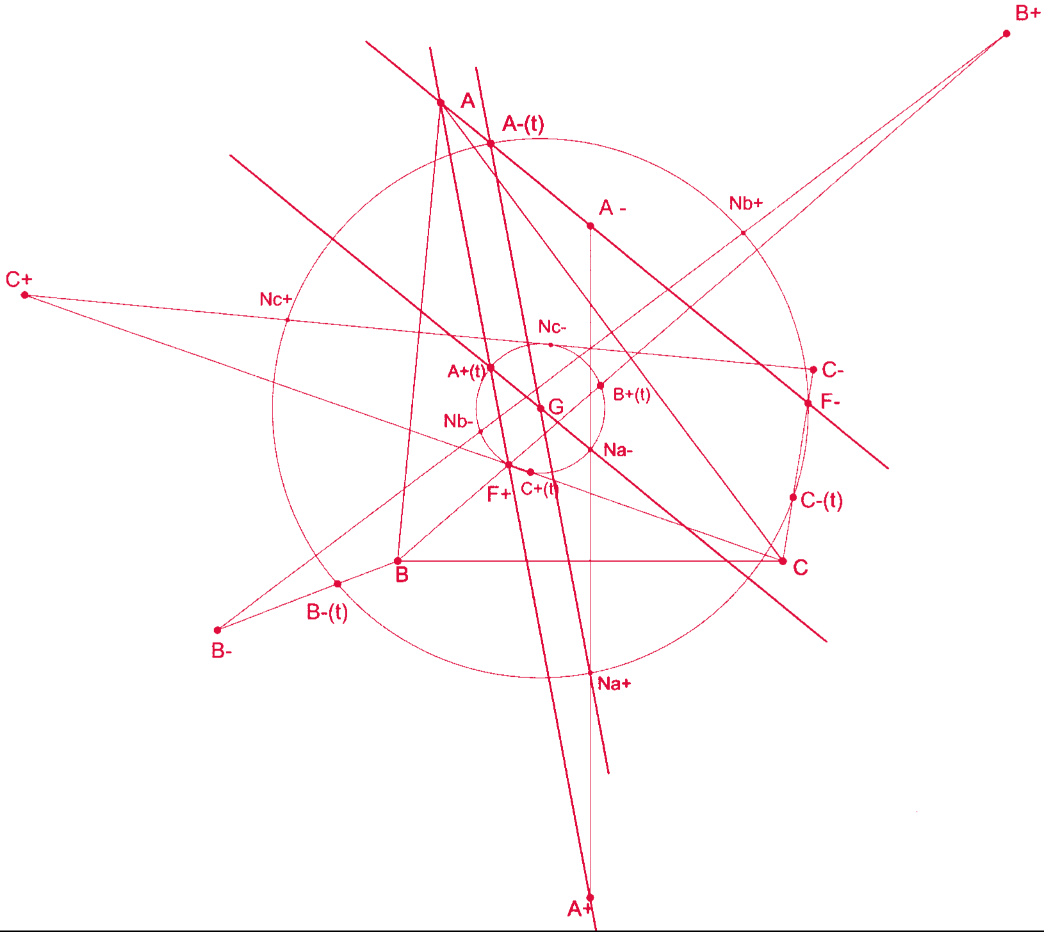
$$A_+(\frac{\tau_+ - \tau_-}{3}), B_+(\frac{\tau_+ - \tau_-}{3}), C_+(\frac{\tau_+ - \tau_-}{3}), A_(\frac{\tau_- - \tau_+}{3}), B_(\frac{\tau_- - \tau_+}{3}),$$
$$C_(\frac{\tau_- - \tau_+}{3}).$$

De twee lijnen staan loodrecht op elkaar, wat verrassend overeenkomt met Bottema's resultaten in [2], waarin immers de twee lijnen gevormd door punten op afstanden $R+r$ en $R-r$ vanaf de hoekpunten van ABC op de hoogtelijnen, ook loodrecht op elkaar bleken te staan; zie ook figuur 2.
We zullen het bestaan van deze twee lijnen aantonen in twee stappen:

(7) $A_e(\frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3}), A_{-e}(\frac{\tau_{-e} + \delta\tau_e}{3})$ en G liggen op één lijn - hetzelfde geldt voor de overeenkomstige punten op de lijnen van Fermat door B en C.

(8) Slechts voor $\delta, e = \pm 1$ en $t = \frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3}$ degenereert de driehoek $T_e(t)$ tot een lijn, die loopt door het zwaartepunt G.
We zullen (7) en (8) in de volgende paragrafen met hulp van coördinaten bewijzen. Hier merken we echter op, dat het onder (7) gestelde ook volgt uit de volgende propositie, die vrij eenvoudig bewezen kan worden door de stelling van Menelaus (zie [1, XIX]) toe te passen in driehoeken AA_+M_a en AA_-M_a, waar M_a het midden is van BC en A_+A_-.

Propositie 1: De lijn door $A_e(t_e)$ en $A_{-e}(t_{-e})$ gaat door het zwaartepunt G dan en slechts dan als
$\frac{\tau_e}{t_e} + \frac{\tau_{-e}}{t_{-e}} = 3.$



FIGUUR 5

4. Homogene barycentrische coördinaten

Om verdere interessante meetkundige resultaten te verkrijgen, maken we gebruik van coördinaten. Bottema heeft het gebruik van homogene barycentrische coördinaten gepropageerd; zie [3] en ook [4] voor enige uitleg en toepassingen.
Laat P een punt zijn in het vlak van driehoek ABC.
Met ABC als referentie zijn de homogene barycentrische coördinaten van P de verhoudingen van oppervlaktes, met teken conform de oriëntatie (zie ook [1, VI.2]) ($\triangle PBC : \triangle PCA : \triangle PAB$).
De coördinaten van de hoekpunten van ABC zijn zodoende respectievelijk (1:0:0), (0:1:0) en (0:0:1).
De naam barycentrische coördinaten is ontleend aan een andere, equivalente, manier om ze te definiëren: het punt met coördinaten $(f{:}g{:}h)$ is het zwaartepunt van de figuur die ontstaat als op hoekpunten A, B en C gewichten worden geplaatst met opvolgend de groottes f, g en h.

De coördinaten van het hoekpunt A_+ van de gelijkzijdige driehoek BCA_+ bijvoorbeeld, zijn – met wat moeite – te vinden als [n3]:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 : \frac{1}{2}ab\sin(C+60^\circ) : \frac{1}{2}ac\sin(B+60^\circ)\right),$$

hetgeen kan worden herschreven als [n4]:

$$A_+ = (-2\sqrt{3}a^2 : \sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)+4\Delta : \sqrt{3}(a^2-b^2+c^2)+4\Delta)\ .$$

Meer algemeen, voor $e=\pm 1$ zijn de derde hoekpunten van de gelijkzijdige driehoeken opgericht op de zijden van ABC de punten

$$A_e = (-2\sqrt{3}a^2 : \sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)+4e\Delta : \sqrt{3}(a^2-b^2+c^2)+4e\Delta)$$
$$B_e = (\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)+4e\Delta : -2\sqrt{3}b^2 : \sqrt{3}(-a^2+b^2+c^2)+4e\Delta)$$
$$C_e = (\sqrt{3}(a^2-b^2+c^2)+4e\Delta : \sqrt{3}(-a^2+b^2+c^2)+4e\Delta : -2\sqrt{3}c^2)$$

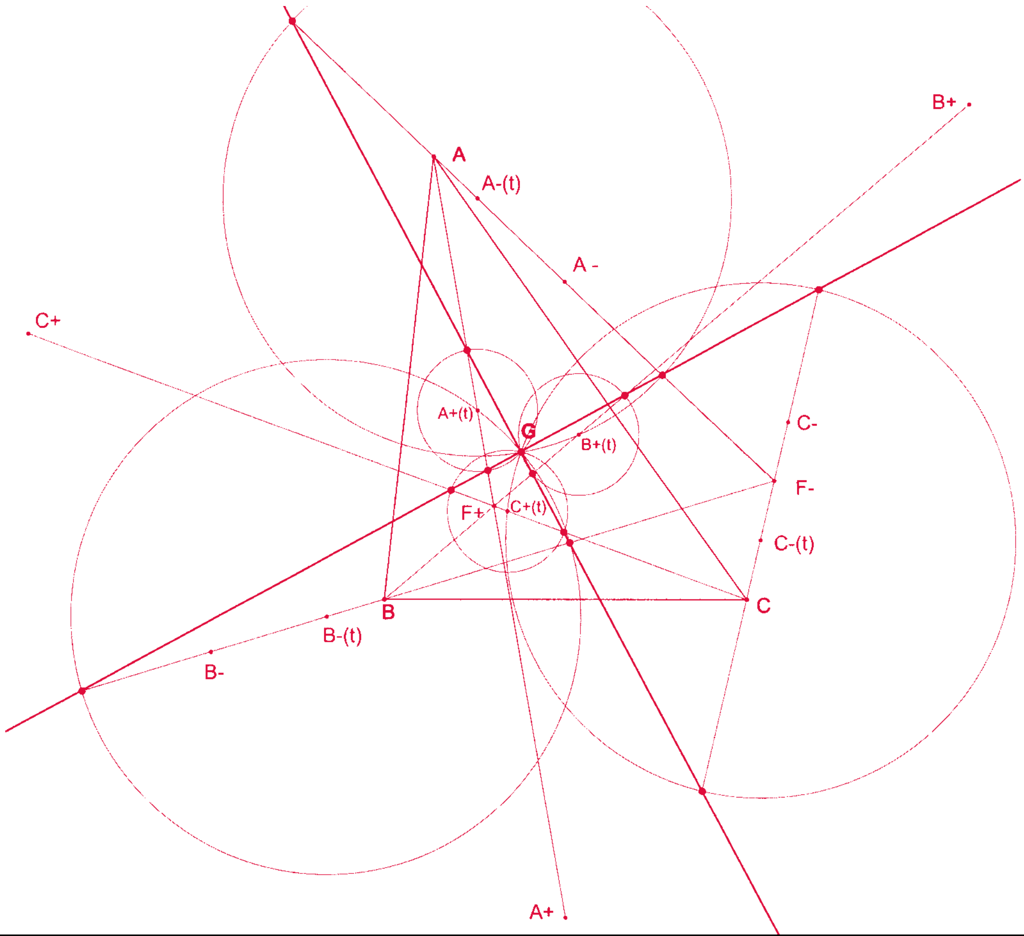
Merk op dat de som van de coördinaten van elk van de punten gelijk is aan $8e\Delta$. Met behulp daarvan is het eenvoudig de coördinaten van het zwaartepunt te berekenen door simpelweg de coördinaten van de hoekpunten op te tellen.

(9A) Voor $e=\pm 1$ hebben driehoeken ABC en $A_eB_eC_e$ hetzelfde zwaartepunt.

Soms is het handig om te werken met *absolute* barycentrische coördinaten [n5]. Voor een eindig punt $P=(u{:}v{:}w)$ krijgen we de absolute barycentrische coördinaten door zijn 'gewone' *homogene* barycentrische coördinaten te normaliseren, dat wil zeggen te delen door de som van de coördinaten. Dus

$$P = \frac{1}{u+v+w}(uA+vB+wC),$$

waarbij $u+v+w$ ongelijk aan nul moet zijn (dan en slechts dan als P eindig is). We kunnen P aldus opvatten als een (plaats)vector. De absolute barycentrische coördinaten van een punt Z dat het lijnstuk XY verdeelt volgens de verhouding $XZ : ZY = v : (1-v)$ heeft absolute coördinaten $Z=(1-v)X+vY$ [n6]. Dit sluit aan bij de interpretatie van Z als zwaartepunt van de punten X en Y, waarbij op X een gewicht van $1-v$ en op Y een gewicht van v wordt geplaatst.



FIGUUR 6

De absolute barycentrische coördinaten van het punt $A_e(t)$ kunnen nu eenvoudig worden uitgedrukt. Voor elke waarde van t geldt:

$$A_e(t) = \frac{1}{\tau_e}((\tau_e - t)A + tA_e). \qquad (*)$$

Samen met (9A) geeft ons dit het meer algemene resultaat:

(9B) Voor willekeurige t hebben $T_e(t)$ en ABC hetzelfde zwaartepunt.

Nu geven we een bewijs van (7). Voor $\delta = \pm 1$ hebben we, met behulp van (*):

$$\tau_e A_e(\frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3}) = (\frac{2\tau_e - \delta\tau_{-e}}{3})A + (\frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3})A_e.$$

Als we e door $-e$ vervangen, en vermenigvuldigen met δ, vinden we

$$\delta\tau_{-e} A_{-e}(\frac{\tau_{-e} + \delta\tau_e}{3}) = (\frac{-\tau_e + 2\delta\tau_{-e}}{3})A + (\frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3})A_{-e}.$$

Combineren we deze twee vergelijkingen dan krijgen we

$$\tau_e A_e(\frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3}) + \delta\tau_{-e} A_{-e}(\frac{\tau_{-e} + \delta\tau_e}{3}) = (\frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3})(A + A_e + A_{-e})$$

$$= (\frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3})(A + B + C)$$

$$= (\tau_e + \delta\tau_{-e})\,G,$$

waarbij $A + A_e + A_{-e} = A + B + C$ volgt uit (1), waar we hebben opgemerkt dat AA_+A_- en ABC hetzelfde zwaartepunt hebben. We concluderen nu dat het zwaartepunt G op de lijn door de punten

$A_e(\frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3})$ en $A_{-e}(\frac{\tau_e + \delta\tau_e}{3})$ ligt.

Daarmee is (7) bewezen.
Hieruit volgt bovendien dat G het lijnstuk in een tamelijk eenvoudige verhouding verdeelt, namelijk:

$$A_e(\frac{\tau_e + \delta\tau_{-e}}{3})G : G\,A_{-e}(\frac{\tau_e + \delta\tau_e}{3}) = \delta\tau_{-e} : \tau_e.$$

5. De oppervlakte van $T_e(t)$

Laten $X = (x_1{:}x_2{:}x_3)$, $Y = (y_1{:}y_2{:}y_3)$ en $Z = (z_1{:}z_2{:}z_3)$ eindige punten zijn met homogene barycentrische coördinaten ten opzichte van driehoek ABC. De oppervlakte *met teken* van de georiënteerde driehoek XYZ is gelijk aan

$$\frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}}{(x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)(z_1 + z_2 + z_3)} \cdot \Delta$$

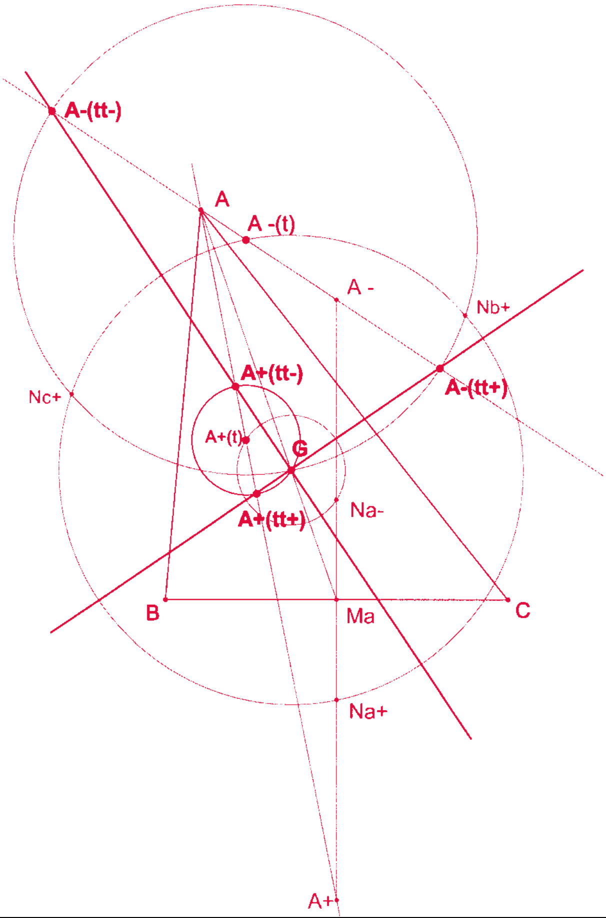
Een bewijs voor deze elegante formule kan worden gevonden in [3], en ook in [1, hoofdstuk VII].

Met deze formule kunnen we na het nodige uitschrijfwerk de oppervlakte van $T_e(t)$ vinden.

Propositie 2: De oppervlakte van driehoek $T_e(t)$ is gelijk aan

$$\frac{3\sqrt{3}e}{4}(t - \frac{\tau_e + \tau_{-e}}{3})(t - \frac{\tau_e - \tau_{-e}}{3})\Delta.$$

Het onder (8) gestelde volgt nu onmiddellijk uit Propositie 2 samen met (9B).
Er is nog een interessant gevolg van Propositie 2. $T_e(t)$ heeft dezelfde oppervlakte als ABC dan en slechts dan als $t = 0$ of $t = \frac{2}{3}\tau_e$.



FIGUUR 7

Enkele resultaten die zwaarder leunen op het gebruik van coördinaten, zullen te vinden zijn in de Engelse versie van dit artikel, dat zal verschijnen in Forum Geometricorum [n7].

Noten

[n1] Dank aan Floor van Lamoen voor de vertaling uit het Engels, en aan Dick Klingens voor het verzorgen van de illustraties.
[n2] De punten staan ook wel bekend als eerste en tweede punt van Fermat-Torricelli.
[n3] Het is in publicaties over driehoeksmeetkunde gebruikelijk de hoeken in een driehoek simpelweg aan te geven met de naam van het hoekpunt.
[n4] We gebruiken dat zodat $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ *zodat*

$$\tfrac{1}{2}ab\sin(C+60°) = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}ab\sin C + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}ab\cos C) = \tfrac{1}{2}(\Delta + \tfrac{1}{4}\sqrt{3}(a^2+b^2-c^2)).$$

[n5] Coördinaten worden absoluut genoemd als zij eenduidig zijn - dit is niet het geval voor de eerder genoemde homogene barycentrische coördinaten.
[n6] Zie [1, hoofdstuk XVIII] voor een soortgelijke werkwijze.
[n7] Forum Geometricorum is een op elementaire meetkunde gericht electronisch tijdschrift dat te bezoeken is op http://forumgeom.fau.edu/

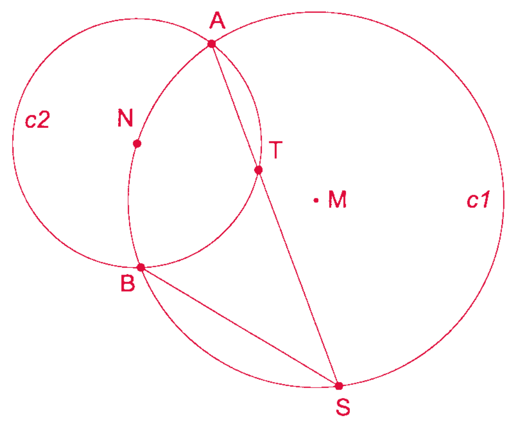
Literatuur

[1] O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, Epsilon Uitgaven, Utrecht (2e druk, 1987)
[2] O. Bottema: Verscheidenheid LV: Zo maar wat in een driehoek, Euclides V (jrg. 39, 1963/1964), pp.129-137; herdrukt in Verscheidenheden, pp. 93-101, Groningen (1978)
[3] O. Bottema: On the area of a triangle in barycentric coordinates, Crux Mathematicorum 8 (1982), pp.228–231
[4] P. Yiu: The uses of homogeneous barycentric coordinates in plane euclidean geometry, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31 (2000), pp.569-578.
Dit artikel kan worden gedownload van http://www.math.fau.edu/yiu/barycentric.pdf

Over de auteur

Paul Yiu (e-mailadres: yiu@fau.edu) is hoogleraar in de Mathematische Wetenschappen aan de Florida Atlantic University (Department of Mathematics), Boca Raton, Florida (33431-0991), USA. *Hij behoort tot de laatste generatie scholieren in Hong Kong die zo gelukkig waren vijf jaar regulier les te krijgen op de middelbare school in Euclidische meetkunde in de jaren 1960. Later, toen hij doctoraalstudent was in Canada, wekten de vele artikelen over meetkunde van professor Bottema in het Canadese problem journal 'Crux Mathematicorum' opnieuw zijn interesse in geavanceerde Euclidische meetkunde, en hij probeerde met alle macht een exemplaar van de fameuze 'Bottema bijbel' over ongelijkheden in een driehoek (Geometric Inequalities), die zo vaak werd geciteerd, te pakken te krijgen. Hij is in het bijzonder geïnteresseerd in constructieproblemen met passer en liniaal.*
De beschikbaarheid van dynamische meetkundesoftware in de afgelopen jaren heeft het leren en onderwijzen van meetkunde verlevendigd. Een van de ideeën achter het oprichten van Forum Geometricorum (http://forumgeom.fau.edu/) is een bron te vormen van interessante dynamische illustraties van de schoonheid en elegantie van klassieke Euclidische meetkunde. Paul Yiu is hoofdredacteur van Forum Geometricorum.

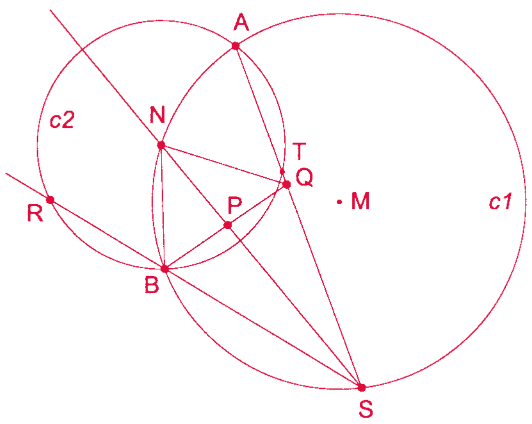
FIGUUR 1 De opgave



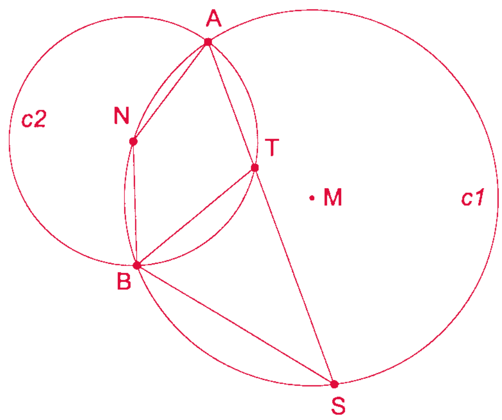
TWEE SCHOOLVOORBEELDEN VAN SCHOOLMEETKUNDE

[Anne van Streun]

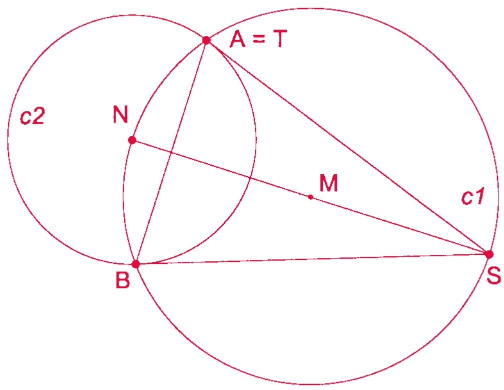
FIGUUR 2 Een indirect bewijs



FIGUUR 3 Bewijs met hoekberekeningen



FIGUUR 4 Een bijzonder geval



Voorbeeld 1: De ene oplossingsmethode is mooier dan de andere

In het boekje 'Denken in cirkels', geschreven door het Profi-team voor het experiment met de Voortgezette Meetkunde (zie ook [1], p.131), stond de volgende opgave die in allerlei varianten is overgenomen in verschillende schoolboeken. Ik volg de formulering uit Moderne wiskunde [2, p.197]; zie figuur 1.

Op een cirkel c_1 met middelpunt M liggen de punten S en N. Een cirkel c_2 met middelpunt N snijdt c_1 in de punten A en B. De koorde SA snijdt c_2 ook in een punt T. Bewijs dat driehoek BST gelijkbenig is.

We volgen eerst de aanpak en het bewijs uit het genoemde Profipakketje en bekijken daarna nog twee geheel andere oplossingsmethoden.
De eerste poging is natuurlijk om direct te bewijzen dat driehoek *BST* gelijkbenig is door de lijn *SN* te trekken. Dat bewijs lukt niet zo snel. Daarom levert het Profi-pakketje een indirect bewijs. Die redenering gaat als volgt (zie figuur 2).

Redenering Profipakketje

Trek de loodlijn uit *B* op *NS*. Die loodlijn snijdt *NS* in het punt *P* en *AS* in het punt *Q*. Wegens de congruentie van de driehoeken *SPB* en *SPQ* geldt $|BP| = |QP|$ en $|SB| = |SQ|$.
Daaruit volgt $|NB| = |NQ|$, dus *Q* ligt op de cirkel c_2.
In dat geval valt *Q* samen met *T*, en geldt $|SB| = |ST|$.
(*Q* is niet gelijk aan *A*, omdat *QS* op *Q* na buiten c_2 ligt en *AS* niet.)

Een bewijs met hoekberekeningen

De opgave heb ik ook voorgelegd aan collega's wiskundedidactici van de universiteiten, en die leverden bewijzen met hoekberekeningen. Het mooiste bewijs van dat type kwam van Agnes Verweij (TU Delft). Zie hiervoor figuur 3.
Vierhoek *ANBS* is een koordenvierhoek, dus
$\angle NBS = 180° - \angle NAS$ ofwel: $\angle NBS = 180° - \angle NAT$
$\angle NTS = 180° - \angle NAT$ en uit $|NA| = |NT|$ volgt
$\angle NTA = \angle NAT$.
Dus: $\angle NBS = \angle NTS$. (1.1)
Uit $|NB| = |NT|$ volgt: $\angle NBT = \angle NTB$. (1.2)
(1.1) minus (1.2) geeft $\angle TBS = \angle BTS$ en hieruit volgt $|SB| = |ST|$.

Een dynamisch bewijs

In diezelfde bijeenkomst met de universitaire wiskunde-didactici deed Lodewijk van Schalkwijk (KU Nijmegen) ons versteld staan met de volgende elegante redenering (zie figuur 4): 'Kijk, met CABRI laat je punt *S* over cirkel c_1 lopen. Dan kom je de situatie tegen dat het punt *S* in het verlengde van *NM* ligt. De gelijkbenigheid van driehoek *BST* is dan evident. De hoeken *BST* en *STB* veranderen niet als *S* loopt, want ze blijven op dezelfde boog staan. Daarmee is het bewijs geleverd ...!'
Later is deze aanpak overgenomen in Moderne wiskunde [2, p.197].

Voorbeeld 2: Ten duidelijkste is ...

Het bijzondere van meetkundige problemen

Er zijn weinig gebieden in de schoolwiskunde waarin opgaven voorkomen die een ervaren leraar zelf voor problemen stellen. Dat was vroeger bij de Euclidische meetkunde en de stereometrie wel anders. Daarin kwamen regelmatig problemen voor waarover ook de wiskundeleraar hard moest nadenken. Gelukkig is dat nu weer het geval bij de Voortgezette Meetkunde in wiskunde B12. Soms lukt het niet om zonder voorbereiding en zonder antwoordenboekje (!) uit de losse pols een oplossing te laten zien. Dan ben je wel gedwongen het advies van Polya op te volgen: hardop denkend met de klas proberen een goede aanpak te vinden. Een enkele keer blijf je steken en moet iedereen verder thuis aan het denken. Maar soms levert ook dat niet genoeg op.
Dat geldt voor het volgende probleem, van de hand van N. Ritsema, door mij gevonden in een nummer van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde. Ik heb het probleem met de oplossing van Ritsema aangeleverd aan Wolfgang Reuter, onze gewaardeerde en veel te vroeg overleden collega. Het probleem paste in een afrondend hoofdstuk van Moderne wiskunde B2, deel 1 [2, p.179]. Na de productie van het leerlingenboek werd het antwoordenboek [3] gemaakt, maar de auteurs daarvan zagen geen kans een oplossing te vinden. Wolfgang en ikzelf waren de bron kwijt en vonden evenmin een aanvaardbare oplossing. Een beroep op een tiental erkende probleemoplossers resulteerde in enkele oplossingen, die deels niet in het programma pasten.
De twee mooiste laat ik u hieronder zien. Tenslotte heb ik een oplossing gecomponeerd, die als erratum in het boekje met uitwerkingen werd toegevoegd. Bij de volgende druk moet dat probleem er maar uit...
Deze zomer ruimde ik mijn meetkundeklappers op en kwam ik het oorspronkelijke probleem met de oplossing van Ritsema weer tegen. Twee regels, die beginnen met de zinsnede: *Ten duidelijkste is ...*
Wilt u met mij meedenken? Voor mij is het nog steeds niet duidelijk!

Het probleem

Zie figuur 5.
In ruit ABCD zijn de hoeken bij A en C 60 graden.
Punt E ligt op het verlengde van DC. F is het snijpunt van AE en BC, P dat van BE en DF.
Bewijs dat punt P op de omgeschreven cirkel ligt van driehoek BCD.

De oplossing van Martin Kindt

Zie figuur 6.
Trek door C een hulplijn evenwijdig aan BD. Die snijdt DF in G.
Vermenigvuldig nu driehoek ABD vanuit F zo dat C het beeld van B is. Dan is E het beeld van A en G dat van D.
Gevolg: D, F, P, G liggen op één lijn en driehoek CEG is gelijkzijdig.
Pas de rotatie toe met centrum C over 60°.
B is dan het beeld van D en E dat van G, dus BE van DG.
Gevolg: de hoek tussen DP en BP is 60°.

De oplossing van Agnes Verweij

Zie figuur 7.
Trek door C een hulplijn evenwijdig aan BD. Die snijdt DF in G.
$\Delta CFG \sim \Delta FBD$, dus $CG : BD = CF : BF$
$\Delta CEF \sim \Delta BAF$, dus $CE : AB = CF : BF$
zodat $|CG| = |CE|$.
Roteren van driehoek CDG over 60° om punt C geeft driehoek CBE, want D wordt B, C blijft C en CG wordt CE.
Daaruit volgt dat het draaien van DG over 60° BE geeft, dus de hoek DPB is 60°.

Mijn uitwerking voor Moderne wiskunde

Zie eveneens **figuur 7**.
Trek door C een hulplijn evenwijdig aan BD. Die snijdt DF in G.
Wegens gelijkvormigheid (gelijke hoeken) geldt:
$k \cdot \Delta ABF = \Delta ECF$ met $k \cdot |BF| = |FC|$ en $k \cdot |AB| = |CE|$ (2.1)
Analoog is $k \cdot \Delta DBF = \Delta GFC$ met $k \cdot |BF| = |FC|$ en $k \cdot |BD| = |CG|$ (2.2)
Omdat $|AB| = |BD|$, volgt uit (2.1) en (2.2) dat $|CE| = |CG|$.
Nu is $\Delta BCE \cong \Delta DCG$ (ZHZ)
want $|BC| = |CD|$, $|CG| = |CE|$ en $\angle BCE = \angle DCG = 120°$.
Hieruit volgt, dat $\angle CDG = \angle CBE = x°$.
$\angle DFC = 120° - x°$ (ΔDFC) en $\angle DFC = \angle BFP$ (overstaande hoeken), waaruit we vinden dat
$\angle BPF = 180° - x° - (120° - x°) = 60°$.

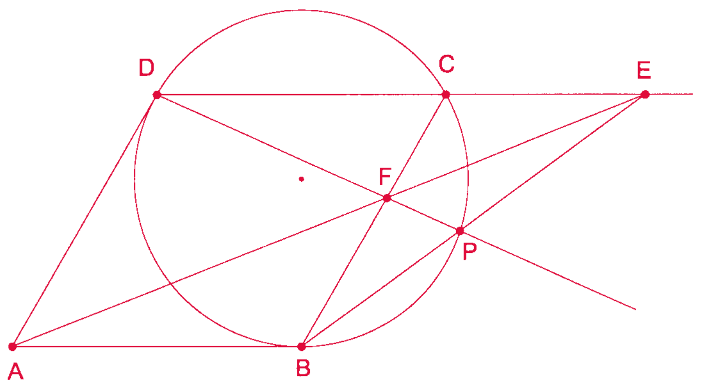
Ten duidelijkste

Ritsema schrijft: Ten duidelijkste is $\Delta EDB \sim \Delta DBF \sim \Delta DPB$, waaruit volgt dat de lijnen BE en DF een hoek van 60° maken. P ligt derhalve op de omgeschreven cirkel van ΔBCD.

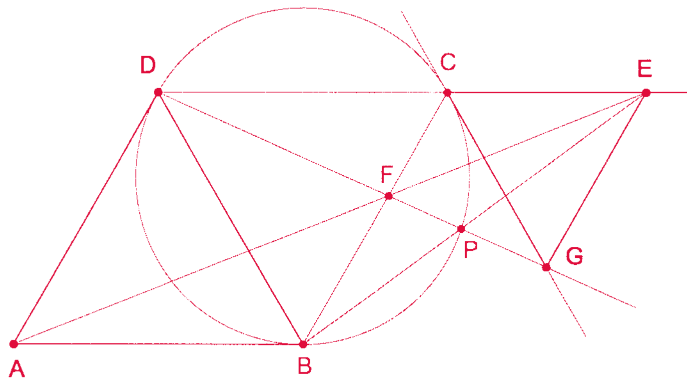
?????

Het kan niet moeilijk zijn, maar wie helpt mij om dit zo uit te schrijven, dat het ook voor mij duidelijk is? Met andere woorden, wie ziet kans om dit bewijs op leerlingenniveau of op mijn niveau (een ietsje pietsje hoger) te leveren? Ik zie het niet!

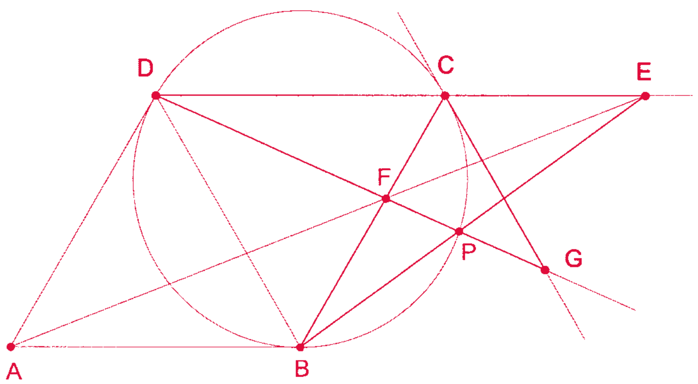
FIGUUR 5 Ritsema's probleem



FIGUUR 6 Bij de oplossing van Martin Kindt



FIGUUR 7 Bij de oplossing van Agnes Verweij en die van de auteur zelf



Noten

[1] Aad Goddijn, Wolfgang Reuter: Denken in cirkels en lijnen, Voortgezette Meetkunde deel IIB, Freudenthal Instituut, Utrecht (1998)

[2] D. Bos, e.a.: Moderne wiskunde vwo bovenbouw, wiskunde B2 - deel 1, Wolters-Noordhoff, Groningen (1999)

[3] D. Bos, e.a.: Moderne wiskunde uitwerkingen, wiskunde B2 – deel 1, Wolters-Noordhoff, Groningen (1999)

Over de auteur

Anne van Streun (e-mailadres: A.van.Streun@math.rug.nl) is sinds 1974 werkzaam aan de Rijksuniversiteit Groningen als wiskundedidacticus en sinds 2000 als hoogleraar in de didactiek van de wiskunde en natuurwetenschappen. Hij heeft de methode Wiskunde Lijn in het leven geroepen en werkte daarna als auteur mee aan de methode Moderne wiskunde.



KEGELSNEDEN SNIJDEN ECHT

Kegelsneden worden meestal analytisch behandeld. In dit artikel vindt u, in de geest van Bottema, een synthetische benadering, met enkele mooie voorbeelden.

[Wim Pijls en Jos van der Slot]

1. Inleiding

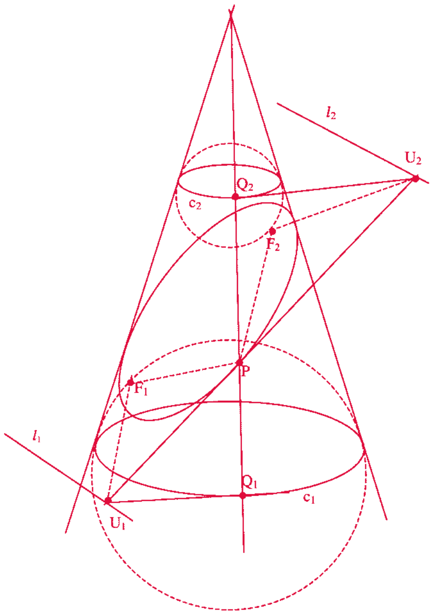
In de collectie van vlakke figuren die door de meetkunde bestudeerd worden, nemen de kegelsneden een belangrijke plaats in. Zoals bekend kan men meetkundige figuren op twee manieren bestuderen: analytisch en synthetisch, of simpeler gezegd: mét en zónder coördinaten. Kegelsneden worden buiten de projectieve meetkunde vrijwel altijd analytisch behandeld. Ze vormden zelfs het hoofdbestanddeel van het oude lesprogramma analytische meetkunde vóór de invoering van de Mammoetwet in 1968. Kegelsneden zijn echter in het geheel niet gebonden aan een analytische benadering, ze lenen zich ook uitstekend voor een synthetische behandeling. In het nieuwe vwo-programma komt dat gelukkig ook tot uitdrukking.
In dit artikel zullen wij daarvan enkele fraaie voorbeelden geven. Dit is volledig in de geest van Bottema, die de meetkunde bij voorkeur vanuit een synthetisch standpunt bestudeerde. Vrijwel alle literatuur van de vorige eeuw over kegelsneden is, voorzover het geen projectieve meetkunde betreft, analytisch van aard. Een uitzondering, ook internationaal gezien, is het boek van Rutgers [9], collega van Bottema aan de Technische Hogeschool te Delft.

2. Een stukje geschiedenis

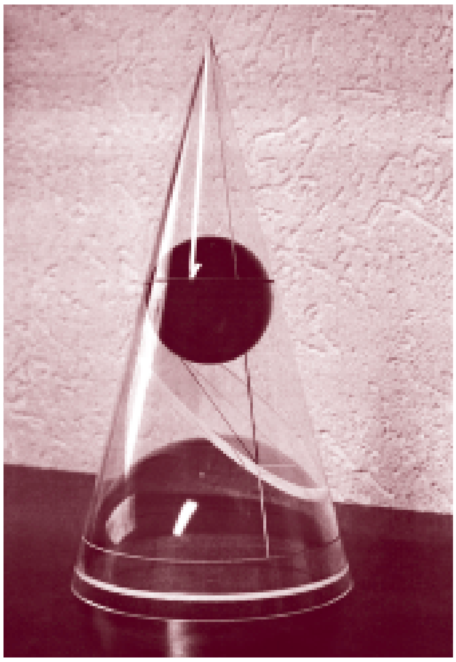
In de Oudheid was men reeds bekend met veel eigenschappen van kegelsneden. Apollonius schreef er een uitvoerig boekwerk over [4 en 6]. Door het ontbreken van een algebraïsch tekenschrift alsmede door de complexiteit van de bewijzen is dit boek moeilijk toegankelijk, duidelijk minder toegankelijk dan bijvoorbeeld de Elementen van Euclides (zie [15] voor een parafrase van onderdelen uit dit boek).
Nadat de algebraïsche notatie zich in de zestiende eeuw ontwikkeld had, ontstond spoedig de analytische meetkunde. Dankzij het werk van Descartes, Fermat en Wallis kregen de kegelsneden hun bekende analytische beschrijving [4].
Eerst in het begin van de negentiende eeuw kwam men tot enkele fraaie synthetische resultaten. Deze staan vooral op naam van de Belgische ingenieur Dandelin, die - als eerste sinds de Oudheid - weer kegelsneden beschouwde in de letterlijke zin: een snede door een kegel. De meeste wiskundigen uit de zeventiende eeuw, waaronder raadpensionaris Johan de Witt en de Leidse wiskundige Van Schooten, zagen kegelsneden puur als figuren in het platte vlak [5]. Dandelin heeft twee artikelen over kegelsneden geschreven, verschenen in respectievelijk 1822 en 1826. Het eerste bevat de resultaten die wij in paragraaf 3 zullen bespreken. Het tweede is getiteld 'Mémoire sur l'hyperboloïde de révolution et sur les hexagons de Pascal et de Brianchon' en handelt grotendeels over de stellingen van Pascal en Brianchon. Over de stelling van Pascal heeft Bottema in andere zin ook geschreven [2, XX].
Op internet is een Engelse vertaling van het tweede artikel beschikbaar [13 en 16]. Ofschoon het stuk geen enkele figuur bevat(!), is het voor de moderne lezer toch zeer toegankelijk. Het voorbereidende werk voor zijn artikelen deed Dandelin in samenwerking met Quételet [10 en 12], die tegenwoordig vooral bekend is als statisticus [11]. Ten onrechte ontbreken hun namen in het bekende geschiedwerk van Coolidge [4]. Later in de negentiende eeuw introduceerde Steiner de projectieve beschouwingswijze van kegelsneden, die weer andere bewijzen voor Pascal en Brianchon mogelijk maakt [7a].

3. Ruimtelijke doorsnijdingen van kegels

Voor de kegelsnede kent men de brandpunt/richtlijn-definitie: een kegelsnede is de verzameling punten zodanig dat de afstand tot een punt F (het brandpunt) en de afstand tot een gegeven rechte l (de richtlijn) een constante verhouding e hebben, de excentriciteit. Voor $e < 1$, $e = 1$ of $e > 1$ spreken we respectievelijk van ellips, parabool of hyperbool. Voor ellips resp. hyperbool hebben we de volgende equivalente



FIGUUR 1 Kegel en kegelsnede met bollen en richtlijnen



FIGUUR 2 Dandelin-kegel van plexiglas

brandpunt/brandpunt-definitie: een ellips resp. hyperbool is de verzameling van punten P zodanig dat de som resp. het verschil van de afstanden tot twee gegeven punten F_1 en F_2 constant is.

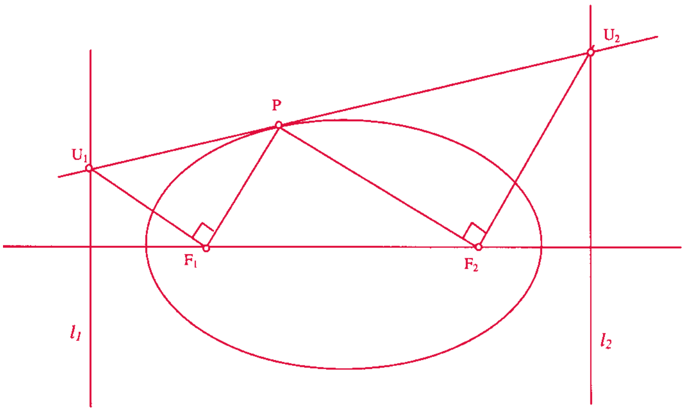
Dandelin heeft een bewijs geleverd voor de volgende stelling:
Een kegelsnede is een snijkromme die ontstaat als men een kegel doorsnijdt met een vlak V dat niet door de top gaat.
De hoek tussen het vlak en de kegelas noemen we β, die tussen een beschrijvende en de kegelas α. Als respectievelijk $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ of $\alpha > \beta$ hebben we een ellips, parabool of hyperbool. Ofschoon dit resultaat op zich niet nieuw was, was Dandelin's elegante bewijs dat wel. We geven hier de versie voor de ellips. Bruno Ernst en Ed de Moor hebben naar dit bewijs verwezen vanwege zijn bijzondere schoonheid [3 en 8].
Zie nu figuur 1, waarin een kegel doorsneden wordt door een vlak dat we V zullen noemen. Er worden inwendig twee bollen aangebracht, die zowel het snijvlak V als de kegelmantel raken. De raakpunten met vlak V heten F_1 en F_2. Punt P is een willekeurig punt op de doorsnede; de beschrijvende door P snijdt de bollen in resp. Q_1 en Q_2. Het bewijs verloopt nu als volgt.
Omdat PF_1 en PQ_1 beide raaklijnen zijn aan dezelfde bol, geldt $PF_1 = PQ_1$. Evenzo geldt $PF_2 = PQ_2$. De waarde $PQ_1 + PQ_2$ is onafhankelijk van de positie van P op de doorsnede. Deze waarde is namelijk gelijk aan de afstand op de kegelmantel tussen de twee raakcirkels c_1 en c_2. Hieruit volgt dat $PF_1 + PF_2$ constant is voor ieder punt P op de snijkromme. De snijkromme is dus een ellips met F_1 en F_2 als brandpunten.

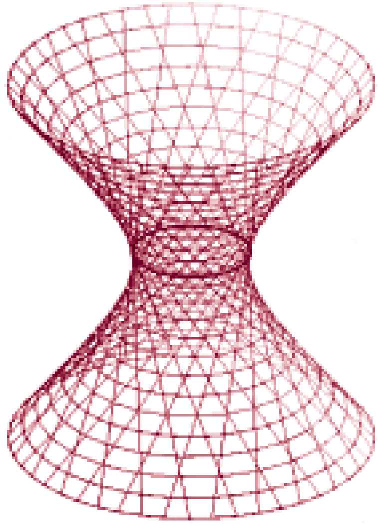
In figuur 1 is een ruimtelijke opstelling getekend. Enkele fraaie tekeningen en animaties van dergelijke configuraties vindt men in [15]. Deze opstelling is natuurlijk ook fysiek te realiseren. In de zeventiger jaren bracht een leverancier van leermiddelen een 'Dandelin-kegel' op de markt, een kegel van plexiglas met inwendig in diverse kleuren het snijvlak en de raakbollen. Een exemplaar hiervan is te zien op de foto van figuur 2.

Het bewijs voor ellipsen is gemakkelijk te transformeren naar hyperbolen. Merk op dat de richtlijn niet voorkomt in deze bewijzen. Dit geeft tevens aan waarom deze bewijzen niet te generaliseren zijn naar de parabool, die immers in zijn definitie de richtlijn essentieel gebruikt. Er is echter een ander bewijs dat aantoont dat de snijfiguur van een vlak met een kegel voldoet aan de brandpunt/richtlijn-definitie. Dit is o.a. te vinden in [1 en 14]. We herhalen het hier niet.
Het blijkt dat de twee richtlijnen van een ellips een interessante ruimtelijke interpretatie hebben: als men in figuur 1 de vlakken van de beide raakcirkels c_1 en c_2 snijdt met het vlak V, dan zijn de snijlijnen l_1 en l_2 precies de richtlijnen van de ellips.

4. Twee eigenschappen van 'kegel-sneden'

Nu we de kegelsneden voortaan mogen zien als doorsnijdingen van kegels, kunnen we ook andere eigenschappen van kegelsneden vanuit dit standpunt bewijzen. We zullen twee bewijzen geven, waarin strikt wordt uitgegaan van de kegelsnede als doorsnede-figuur. Deze bewijzen ontlenen we aan [9]; daarbuiten zijn we ze nergens tegengekomen. Zie nu weer figuur 1. Het raakvlak aan de kegel door de beschrijvende Q_1PQ_2 zullen we W noemen. Dit raakvlak snijdt de richtlijnen in resp. U_1 en U_2. Omdat de richtlijnen in V liggen, is U_1U_2 de snijlijn van V met W. Punt P ligt op deze snijlijn U_1U_2. Omdat U_1U_2 als lijn in het raakvlak W alleen P gemeen heeft met de snijfiguur en aangezien U_1U_2 ook in het snijvlak V ligt, is U_1U_2 de raaklijn aan de kegelsnede in P. We hebben nu: $U_1F_1 = U_1Q_1$ als twee raaklijnen vanuit een punt aan dezelfde bol, en evenzo $PF_1 = PQ_1$. Hieruit volgt:





FIGUUR 3 Kegelsnede met brandpunten en richtlijnen, gelegen in vlak V

FIGUUR 4 Hyperboloïde

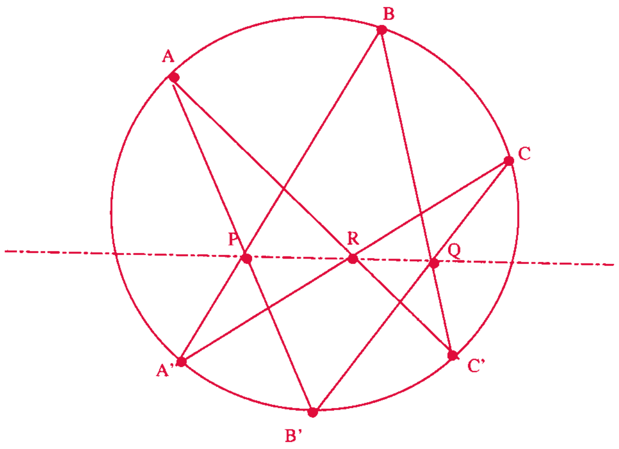
de driehoeken PQ_1U_1 en PF_1U_1 zijn congruent. Ook geldt dat $\angle PQ_1U_1 = 90°$ want raaklijn U_1Q_1 staat loodrecht op het vlak door PQ_1 en de kegelas. Bijgevolg is ook $\angle PF_1U_1 = 90°$. Hiermee is de volgende eigenschap bewezen:
De verbinding van een brandpunt F met een punt U op l staat loodrecht op de voerstraal van F naar het raakpunt van de raaklijn uit U.
Zie ter illustratie figuur 3, waarin vlak *V* is afgebeeld. De eigenschap is equivalent met: *de poollijn* (= de verbindingslijn van raakpunten) *behorende bij een punt U op l gaat door F en staat loodrecht op FU.*

Een tweede eigenschap die we kunnen afleiden is de volgende: omdat $\angle U_1PQ_1 = \angle U_2PQ_2$ (overstaande hoeken), hebben we ook $\angle U_1PF_1 = \angle U_2PF_2$. Hieruit volgt meteen onze tweede eigenschap: *de voerstralen PF_1 en PF_2 van een punt P op een kegelsnede maken gelijke hoeken met de raaklijn aan de kegelsnede in P.* Deze eigenschap zorgt ervoor dat kegelsneden op een bijzondere manier licht terugkaatsen. Voor een ellips bijvoorbeeld geldt, dat elke lichtstraal die vanuit het ene brandpunt in een willekeurige richting wordt uitgezonden, na terugkaatsing tegen de ellips door het andere brandpunt gaat.

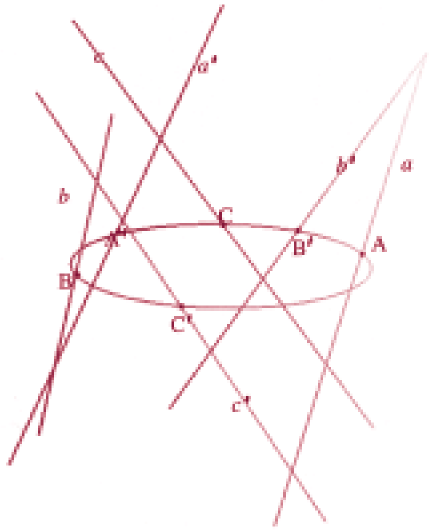
We hebben in deze paragraaf een ruimtelijk bewijs van twee stellingen over kegelsneden gezien. Voor stellingen die handelen over de richtcirkel of de orthoptische cirkel van kegelsneden [7b en 15], zijn ons geen ruimtelijke bewijzen bekend. Deze cirkels hebben ook geen ruimtelijke interpretatie, voor zover wij weten.

5. Hyperboloïde

De wezenlijke observatie in het bewijs van paragraaf 3 is: het hoogteverschil langs een beschrijvende rechte tussen de twee raakcirkels c_1 en c_2 is gelijk aan de som van de afstanden van een willekeurig punt *P* op de snijfiguur tot de twee raakpunten met de bollen. Deze observatie is ook van toepassing, indien we niet een kegel maar een cilinder snijden met een vlak. We brengen twee raakbollen aan, boven en onder het snijvlak, en het bewijs van paragraaf 3 kan zonder meer worden herhaald. Na de kegel en de cilinder blijkt nog een derde figuur kegelsneden te bevatten. De genoemde observatie geldt ook voor de eenbladige *hyperboloïde*. De lezer is mogelijk niet vertrouwd met deze figuur. We zullen daarom eerst toelichten hoe zo'n oppervlak er eigenlijk uitziet (zie figuur 4). Dit gebogen oppervlak ontstaat door een hyperbool om een as te laten wentelen. Door ieder punt op het oppervlak gaan precies twee beschrijvende rechten, zeg een opwaartse en een neerwaartse (zie [1] voor details). Twee beschrijvenden van dezelfde soort snijden elkaar niet. Elke opwaartse snijdt elke andere neerwaartse beschrijvende. Elke beschrijvende rechte is kruisend met de omwentelingsas van de hyperboloïde en maakt er een constante hoek mee.
Stel we hebben twee bollen die de hyperboloïde inwendig raken. Een gemeenschappelijk raakvlak snijdt de hyperboloïde dan volgens een kegelsnede. De bovengenoemde observatie is weer de sleutel tot het bewijs. De hyperboloïde kunnen we ook in verband brengen met de brandpunt/richtlijn-definitie. Stel men heeft een bol die inwendig aan de hyperboloïde raakt, en een raakvlak aan deze bol snijdt de omwentelingsas onder een hoek β. Het snijvlak met de hyperboloïde is resp. een ellips, parabool of hyperbool, al naar gelang resp. $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$ of $\alpha > \beta$, met α de constante hoek tussen een beschrijvende en de omwentelingsas.
Dandelin heeft ook aangetoond, dat bij elke kegelsnede een kegel, een cilinder en/of een hyperboloïde te construeren zijn, waarin de gegeven kegelsnede een doorsnede-figuur is. We zullen deze constructie slechts globaal schetsen voor een ellips (zie [12] of het originele artikel in [13] of [16] voor een meer gedetailleerde beschrijving). Men bouwt een ruimtelijke



FIGUUR 5 Pascal-configuratie



FIGUUR 6 Kegelsnede met zeshoek en zes beschrijvenden

configuratie die er als volgt uitziet: twee bollen die het vlak van de ellips aan weerskanten in de brandpunten raken, samen met een gemeenschappelijke raaklijn *s* die tevens de ellips snijdt. De rechte *s* wordt gewenteld om de gemeenschappelijke middellijn *m* van de bollen. Door deze wenteling ontstaat een kegel, ellips of hyperboloïde al naar gelang *s* en *m* elkaar snijden, aan elkaar evenwijdig zijn, of elkaar kruisen.

6. De stellingen van Pascal en Brianchon

In de vorige paragraaf vermeldden we dat door elk punt van een hyperboloïde een opgaande en een neergaande beschrijvende gaat. Deze eigenschap maakt elegante bewijzen mogelijk voor twee andere bekende stellingen over kegelsneden, de stellingen van Pascal en Brianchon. Deze bewijzen zijn ook afkomstig van Dandelin. We zijn ze via internet op het spoor gekomen [16 en 17] en hebben ze daarna slechts in één boek [12] kunnen terugvinden.
De meeste lezers zijn waarschijnlijk wel bekend met deze stellingen. De stelling van Pascal luidt:
Indien

$AB' \cap A'B = P$

$BC' \cap B'C = Q$

$AC' \cap A'C = R$

dan liggen P, Q en R op één lijn (zie figuur 5).
Zie ook [2 en 7] voor een behandeling van deze stellingen.
Het bewijs is als volgt. Zoals besproken in paragraaf 5, mogen we veronderstellen dat de kegelsnede gelegen is op een hyperboloïde. Trek door *A*,*B*,*C* opwaartse beschrijvenden *a*, *b*, *c* en door *A*', *B*', *C*' neerwaartse beschrijvenden *a'*, *b'*, *c'*. In figuur 6 ziet men de ruimtelijke scheve zeshoek *ab'ca'bc'* getekend. Laten we naar de vlakken *ab'* (vlak door deze lijnen) en *a'b* kijken. Deze vlakken snijden het horizontale vlak volgens *AB*' en *A'B* en gaan dus beide door *P*. Anderzijds is de snijlijn van deze vlakken *ab'* en *a'b* ook de verbindingslijn van de punten *aa'* (snijpunt van de lijnen *a* en *a*') en *bb'*. *P* ligt dus op de verbindingslijn van de punten *aa'* (snijpunt van de lijnen *a* en *a*') en *bb'*. Op dezelfde wijze laten we zien, dat de verbindingslijn van *bb'* en *cc'* door *Q* en de verbindingslijn van *aa'* en *cc'* door *R* gaat. Het vlak bepaald door de drie punten *aa'*, *bb'* en *cc'* bevat de punten *P*,*Q*,*R* en snijdt het horizontale vlak volgens een lijn. De punten *P*, *Q* en *R* als punten in het horizontale vlak liggen dus op deze snijlijn.

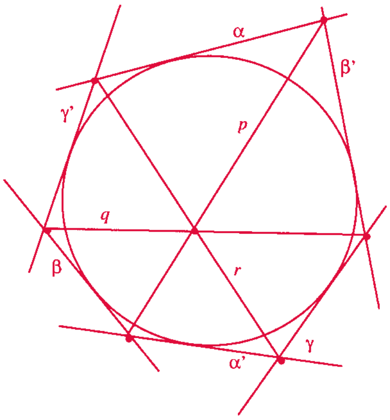
Duaal tegenover Pascal staat de stelling van Brianchon. Beschouw de raaklijnenzeshoek $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ om een kegelsnede (zie figuur 7). De stelling van Brianchon zegt:
Indien

$\alpha\beta' \cup \alpha'\beta = p$

$\beta\gamma' \cup \beta'\gamma = q$

$\alpha\gamma' \cup \alpha'\gamma = r$

dan gaan p, q en r door één punt.
We bewijzen Brianchon voor de grondcirkel (ofwel de 'taille') van de hyperboloïde. De stelling is dan ook bewezen voor elke andere kegelsnede.
Trek door de raakpunten *A*, *B*, *C* opwaartse beschrijvende rechten *a*,*b*,*c* en door *A*', *B*', *C*' neerwaartse beschrijvenden *a'*, *b'*, *c'*. Beschouw weer de ruimtelijke scheve zeshoek *ab'ca'bc'*. Figuur 6 kan nu opnieuw gebruikt worden. De verticale projectie (loodrecht op het grondvlak) van zeshoek *ab'ca'bc'* levert zeshoek $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$. Iedere beschrijvende raakt namelijk in de grondcirkel aan de verticale cilinder door die grondcirkel. Omdat $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ de projectie is van *ab'ca'bc'*, zijn *p*,*q*,*r* de projecties op het grondvlak van diagonalen van *ab'ca'bc'*. We zullen bewijzen dat deze diagonalen door één punt gaan. De lezer wordt uitgenodigd na te gaan, dat dat in figuur 6 inderdaad het geval is. Als we eenmaal weten dat de ruimtelijke diagonalen door één punt gaan, weten we dat ook van *p*, *q* en *r*.
Laten we de diagonaal corresponderend met *p*



FIGUUR 7 Brianchon-configuratie

bekijken. Dit is de diagonaal tussen de punten *ab'* (snijpunt van deze lijnen) en *a'b*. Deze rechte is ook de snijlijn van de vlakken *aa'* (vlak door *a* en *a'*) en *bb'*. Op dezelfde manier correspondeert *q* met de snijlijn van de vlakken *bb'* en *cc'* en *r* met de snijlijn van de vlakken *aa'* en *cc'*. De vlakken *aa'*, *bb'* en *cc'* gaan door één punt en dus ook hun snijlijnen. De diagonalen in de ruimtelijke zeshoek *ab'ca'bc'* gaan dus door één punt.

7. Slotopmerkingen

Zoals al enkele malen in het voorgaande is gebleken, heeft dit artikel onmiskenbaar geprofiteerd van de schier oneindige kennisbron die Internet heet. De moderne informatie-technologie blijkt onverwachte perspectieven te openen voor de beoefenaren van de 'oude' meetkunde. Daarnaast hebben we natuurlijk ook dankbaar gebruik gemaakt van de welhaast antieke boeken van Rutgers en Hk. de Vries [9 en 12].

Literatuur

[1] J.M. Aarts: Meetkunde, facetten van de planimetie en stereometrie, Epsilon Uitgaven, Utrecht (2000)

[2] O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, herdruk (van de originele uitgave van 1944), Epsilon Uitgaven, Utrecht (1987)

[3] Zsòfia Ruttkay: Bruno Ernst over wiskunde, in Euclides 76 (nr. 0, augustus 2000), pp. 012-017

[4] J.L. Coolidge: A History of Conic Sections and Quadric Surfaces, Dover (1968, herdruk van 1945)

[5] A.W. Grootendorst: De 'Kegelsneden' bij Johan de Witt, in Vakantiecursus 1995, Kegelsneden en Kwadratische vormen, CWI-syllabus nr. 40, pp. 17-55, CWI, Amsterdam

[6] J.P. Hogendijk: Kegelsneden in de Griekse Oudheid, in Vakantiecursus 1995, Kegelsneden en Kwadratische vormen, CWI-syllabus nr. 40, pp. 1-14, CWI, Amsterdam

[7a] M. Kindt: Lessen in Projectieve Meetkunde, Epsilon Uitgaven, Utrecht (1993)

[7b] M. Kindt: Orthoptica, in Euclides 77 (nr. 4, januari 2002), pp. 172-177

[8] Ed de Moor: Euclides' moeilijkste eeuw, in Euclides 76 (nr. 8, juni 2001), pp. 290-303

[9] J.G. Rutgers: Meetkunde der Kegelsneden, deel 9 van Noordhoff's verzameling van wiskundige werken, Groningen-Batavia (1939)

[10] I. Skinner: Quételet and Dandelin of Brussels, The Mathematical Intelligencer, volume 19, nr. 4, pp. 55-57

[11] Ida Stamhuis: Adolphe Quételet, bepleiter van de statistische middelmaat, Euclides 71, nr. 4, pp. 110-115

[12] Hk. de Vries: Geschiedenis van de stellingen van Pascal en Brianchon, in: Historische Studiën, deel 1, pp. 1-83, P. Noordhoff, Groningen (1926).

Webpagina's

[13] http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConicSections_dir/conicSections.html; Xah Special Plane Curves: Conic Sections

[14] http://www.bib.ulb.ac.be/coursmath/belges.htm; Théorèmes de Dandelin et Quételet

[15] http://www.pandd.demon.nl/index.html; Homepage Dick Klingens

[16] http://www.math.ubc.ca/people/faculty/cass/cass.html; Bill Casselman's Homepage

[17] http://www.cs.ubc.ca/%7Etzupei/Math/index.html; Monsieur Dandelin

Over de auteurs

Wim Pijls (e-mailadres: pijls@few.eur.nl) werkte van 1973 tot 1984 als docent wiskunde en informatica aan de Lerarenopleiding Zuidwest-Nederland, thans Hogeschool Rotterdam. Sinds 1984 is hij docent informatica aan de Erasmus Universiteit te Rotterdam.

Jos van der Slot (e-mailadres: J.van.der.Slot@hro.nl) werkt vanaf 1973 als docent wiskunde aan de Lerarenopleiding Zuidwest-Nederland en de Hogeschool Rotterdam.

Beide auteurs hebben veel meetkundeonderwijs ontwikkeld en gegeven; zij werkten in dit opzicht veel samen gedurende de periode dat zij collega's waren aan de Lerarenopleiding Zuidwest-Nederland.

SPIRALEN VAN DRIEHOEKEN

[Leon van den Broek]

Inleiding

Gegeven is een driehoek. Een van de zijden verdelen we met een loodlijn in stukken die zich verhouden als 6 : 7. Een andere zijde verdelen we met een loodlijn in stukken die zich verhouden als 1 : 2. De derde zijde verdelen we met een loodlijn in stukken die zich verhouden als 2 : 3 (zie figuur 1). De drie loodlijnen begrenzen een driehoek die gelijkvormig is met de oorspronkelijke driehoek. Bij deze nieuwe driehoek doen we weer hetzelfde: we verdelen elke zijde met loodlijnen in stukken in dezelfde verhouding als de eerste keer. De nieuwe loodlijnen begrenzen op hun beurt een driehoek; enzovoort. Zodoende ontstaat er een spiraal van gelijkvormige driehoeken.

We kunnen de constructie natuurlijk ook met andere verhoudingen uitvoeren. Alleen als de drie loodlijnen door één punt gaan, is er geen sprake van een spiraal. In [1] schreef Bottema in hoofdstuk III over loodlijnen die door één punt gaan. Daarin [1, p.16] wordt over drie loodlijnen op de zijden van driehoek ABC het volgende gesteld: 'Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de concurrentie van de door de punten P, Q en R respectievelijk op BC, CA en AB getrokken loodlijnen is:

$BP^2-PC^2+CQ^2-QA^2+AR^2-RB^2=0$'

(zie figuur 2).

We volgen Bottema om dit te bewijzen. In figuur 3 snijdt de lijn m de lijn AB loodrecht in R. Door de stelling van Pythagoras toe te passen in de driehoeken ARX en BRX volgt dat $AR^2-RB^2=AX^2-XB^2$ voor elk punt X op m. Als nu de drie loodlijnen door één punt S gaan, zoals in figuur 2, dan geldt:

$BP^2-PC^2+CQ^2-QA^2+AR^2-RB^2=$
$BS^2-SC^2+CS^2-SA^2+AS^2-SB^2=0.$

Verschuiven we in figuur 2 de loodlijn op AB, dan ontstaat driehoek $A_1B_1C_1$ die gelijkvormig is met de oorspronkelijke driehoek ABC. Zie nu figuur 4. R_0 is de oorspronkelijke positie van R. Nu is $BP^2-PC^2+CQ^2-QA^2+AR^2-RB^2\neq 0$ en hebben we een begin gemaakt met een spiraal van driehoeken.

Een volgende driehoek in de spiraal ontstaat uit de vorige door een draaivermenigvuldiging (of schroeving). Dat is een samenstelling van een draaiing om een punt en een puntvermenigvuldiging met dat punt als centrum. In dit artikel vinden we een formule voor de vermenigvuldigingsfactor in termen van de drie verhoudingen waarin de loodlijnen de zijden van de driehoek verdelen. Vervolgens zoeken we het centrum van de draaivermenigvuldiging; dat is het 'oog' van de spiraal. Tenslotte bekijken we twee bijzondere voorbeelden ter illustratie.

De vermenigvuldigingsfactor

In figuur 3 heeft lijnstuk AB lengte c. De lijn m snijdt de lijn AB loodrecht in punt R. Stel dat R op lijnstuk AB ligt (dus tussen A en B) en dat de lengtes van AR en RB zich verhouden als $r:(1-r)$, met $0<r<1$. Dan is $AR^2-RB^2=(rc)^2-((1-r)c)^2=(2r-1)c^2$.

We kunnen iets soortgelijks ook doen als R niet tussen A en B ligt. Ligt R op het verlengde van lijnstuk AB aan de kant van B, dan is $r>1$. Ligt R op het verlengde van lijnstuk AB aan de kant van A, dan is $r<0$.

De drie loodlijnen door S in figuur 2 verdelen de zijden BC, CA en AB in stukken die zich respectievelijk verhouden als $p:(1-p)$, $q:(1-q)$ en $r_0:(1-r_0)$. Uit de concurrentie (door één punt gaan) van deze drie loodlijnen volgt

$(2p-1)a^2+(2q-1)b^2+(2r_0-1)c^2=0.$

Delen door 2 geeft dan:

$(p-\frac{1}{2})a^2+(q-\frac{1}{2})b^2+(r_0-\frac{1}{2})c^2=0.$

De coëfficiënten van a^2, b^2 en c^2 geven de posities aan van de voetpunten P, Q en R ten opzichte van het midden van de zijden van driehoek ABC.

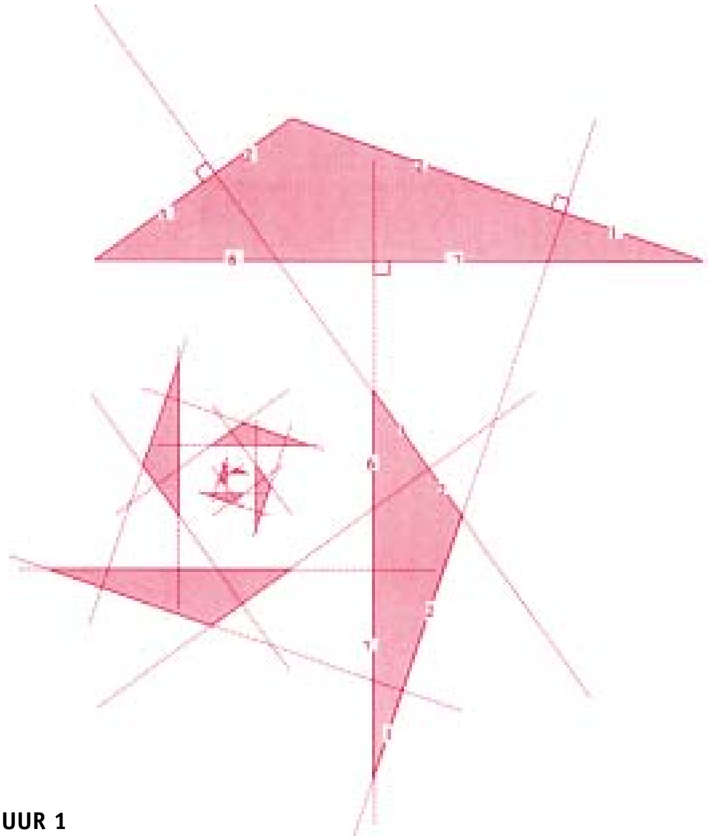
We hebben de loodlijn op AB verschoven van R_0 naar R. $(p-\frac{1}{2})a^2+(q-\frac{1}{2})b^2+(r-\frac{1}{2})c^2$ noteren we als $F(p, q, r)$.

Er geldt dus: $F(p, q, r_0)=0$.

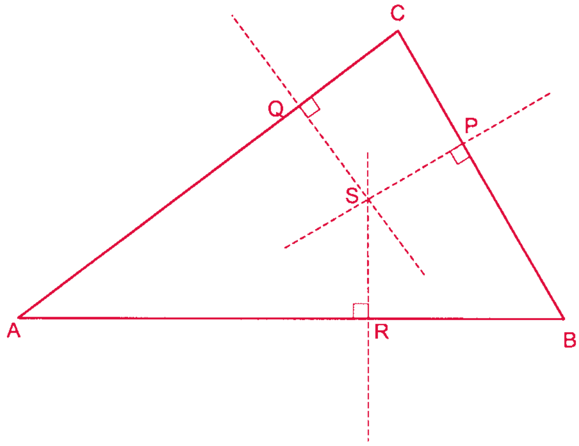
Als $r<r_0$, zoals in figuur 4, is $r-\frac{1}{2}<r_0-\frac{1}{2}$, dus $F(p, q, r)<0$. Driehoek $A_1B_1C_1$ is dan ten opzichte van driehoek ABC gedraaid over 90° in negatieve richting (dat is met de klok mee). Als de loodlijn naar rechts wordt verschoven, is $F>0$ en is de rotatie over 90° in positieve richting.

Samengevat:

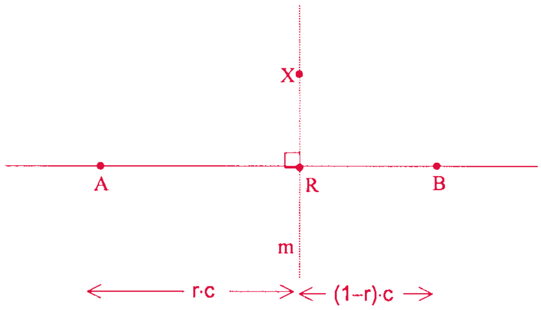
$F(p, q, r)<0$: rotatie over -90°
$F(p, q, r)=0$: loodlijnen gaan door één punt
$F(p, q, r)>0$: rotatie over +90°



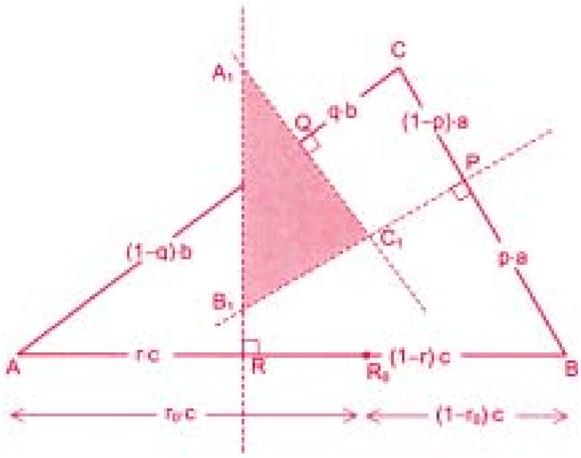
FIGUUR 1



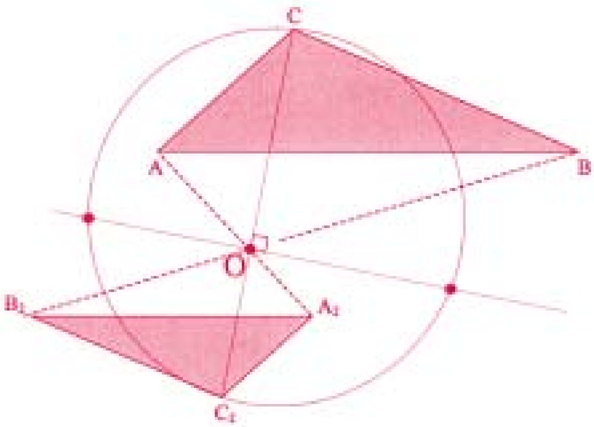
FIGUUR 2



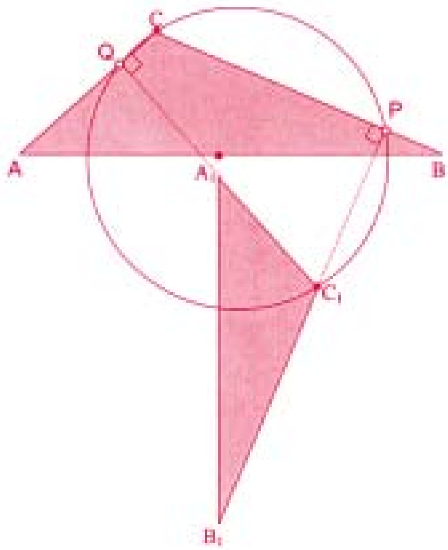
FIGUUR 3



FIGUUR 4



FIGUUR 5



FIGUUR 6

De hoogtelijn in driehoek ABC uit hoekpunt C heeft lengte h_c; de hoogtelijn in driehoek $A_1B_1C_1$ uit C_1 heeft lengte h_{c1}. De vermenigvuldigingsfactor is dus $h_{c1} : h_c$. Deze factor noemen we f.
$|F(p,q,r)| = |F(p, q, r) - F(p, q, r_0)| = |r - r_0|c^2 = |RR_0| \cdot c = h_{c1} \cdot c = f \cdot h_c \cdot c = f \cdot 2O$, waarbij O de oppervlakte van driehoek ABC is.

Hieruit volgt: $f = \dfrac{|F(p, q, r)|}{2O}$.

Omdat $2O = h_a \cdot a = h_b \cdot b = h_c \cdot c$, waarbij h_a en h_b analoog gedefinieerd zijn aan h_c, kunnen we f ook als volgt schrijven:

$$f = \left|\frac{(p-\frac{1}{2})a^2}{h_a \cdot a} + \frac{(q-\frac{1}{2})b^2}{h_b \cdot b} + \frac{(r-\frac{1}{2})c^2}{h_c \cdot c}\right|$$
$$= \left|(p-\tfrac{1}{2})\frac{a}{h_a} + (q-\tfrac{1}{2})\frac{b}{h_b} + (r-\tfrac{1}{2})\frac{c}{h_c}\right|$$

Het oog van de spiraal

Uitgaande van een driehoek ABC met op de (verlengden van de) zijden de punten P, Q en R, ligt de spiraal vast. Kunnen we bij voorbaat zeggen waar het oog van de spiraal ligt? Daarover gaat het volgende.
Door de constructie twee keer uit te voeren, ontstaat driehoek $A_2B_2C_2$ uit driehoek ABC: een draaiing over 180° tezamen met een vermenigvuldiging met f^2, ofwel een puntvermenigvuldiging met factor $-f^2$. Het centrum van deze puntvermenigvuldiging is het oog O van de spiraal (zie figuur 5). Dit ligt dus op de lijnen AA_2, BB_2 en CC_2.
Als we de driehoeken ABC en $A_2B_2C_2$ kennen, kunnen we driehoek $A_1B_1C_1$ als volgt vinden. Omdat $|OC_2| = f^2 \cdot |OC|$ en $|OC_1| = f \cdot |OC|$, is $|OC_1|$ de middelevenredige van $|OC|$ en $|OC_2|$. We gaan daarom als volgt te werk. We tekenen een lijn door O loodrecht op CC_2 en snijden deze met de cirkel met middellijn CC_2. Laat X een van de snijpunten zijn. Met gelijkvormigheid is gemakkelijk te bewijzen dat $|OX|^2 = |OC| \cdot |OC_2|$, met andere woorden: $|OX|$ is de middelevenredige van $|OC|$ en $|OC_2|$. Er zijn twee punten X die voor C_1 in aanmerking komen. Welk van de twee C_1 is, hangt af van het teken van F. Daarna is het tekenen van driehoek $A_1B_1C_1$ een koud kunstje. Als C en C_2 hetzelfde punt zijn, is dat punt meteen het oog.

In figuur 6 zijn de driehoeken ABC en $A_1B_1C_1$ getekend. Dit is het begin van een spiraal, waarvan we het oog O willen bepalen.
Omdat $\angle CPC_1$, $\angle CQC_1$ en $\angle COC_1$ recht zijn, liggen P, Q en O op de cirkel met middellijn CC_1. Dus ligt het oog O op de cirkel door C, P en Q.
Evenzo ligt O op de cirkel door A, Q en R en op de cirkel door B, P en R (zie figuur 7). De *Stelling van Miquel* zegt dat deze cirkels door één punt gaan (zie hiervoor [3, hoofdstuk 19] of [4]). Hierbij mogen de punten P, Q en R ook op de verlengden van de zijden van driehoek ABC liggen. Het gemeenschappelijke punt van deze cirkels is het zogenoemde *punt van Miquel*.
Hiermee hebben we het volgende bewezen:

Het oog van de spiraal is het punt van Miquel van driehoek ABC bij de punten P, Q en R op achtereenvolgens de lijnen BC, CA en AB.

Nogmaals door één punt

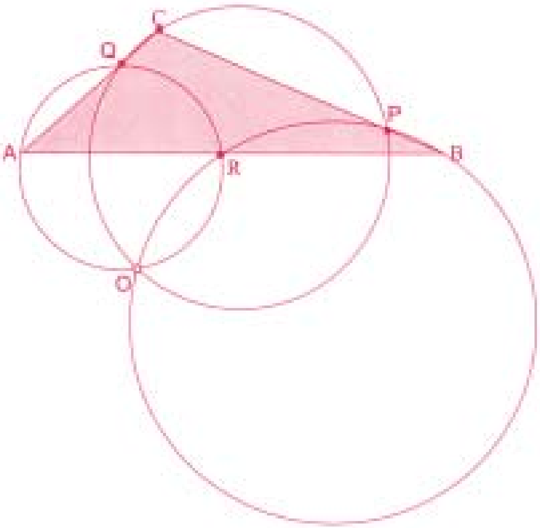
Teken op de zijden van een driehoek naar buiten vierkanten (zie figuur 8). Een soortgelijk plaatje kennen we bij de stelling van Pythagoras, maar nu maken we het bij een willekeurige driehoek. De middelloodlijnen van de zijden van de driehoek verdelen de vierkanten in twee helften. Teken loodlijnen op de drie zijden van de driehoek en bekijk de stroken in de vierkanten tussen deze loodlijnen en de middelloodlijnen. In figuur 8 zijn deze stroken lichtrood aangegeven. We voorzien de oppervlakte van de stroken van een teken: we rekenen de oppervlakte positief als de loodlijn vanuit de driehoek gezien links van de middelloodlijn ligt (zoals bij strook I in figuur 8), anders negatief.
In de notatie van het voorgaande geldt dan:
oppervlakte van strook I is $O_I = (p - 1)a \cdot a > 0$,
oppervlakte van strook II is $O_{II} = (q - 1)b \cdot b < 0$,
oppervlakte van strook III is $O_{III} = (r - 1)c \cdot c > 0$.
We hebben dus gevonden: $F = O_I + O_{II} + O_{III}$.

De drie loodlijnen gaan dan en alleen dan door één punt als de som van de georiënteerde oppervlakten van de stroken tussen de loodlijnen en de middelloodlijnen 0 is.

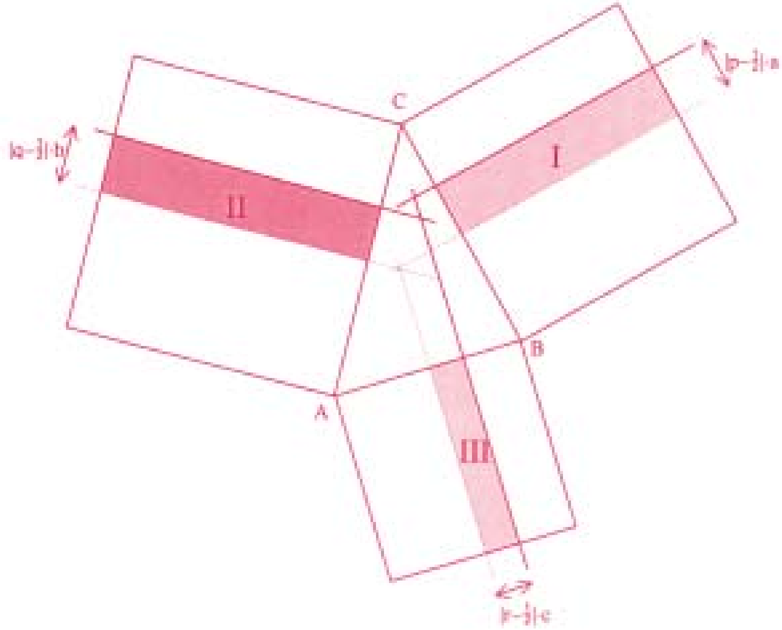
Een variant van dit resultaat staat in figuur 9 (zie ook [2]). Loodlijnen verdelen de zijden van de driehoek. Op elk van de zes stukken zijn vierkanten getekend, die afwisselend licht- en donkerrood zijn ingekleurd. De drie loodlijnen gaan alleen dan door één punt als de lichtrode vierkanten samen even groot zijn als de donkerrode vierkanten.

Twee voorbeelden

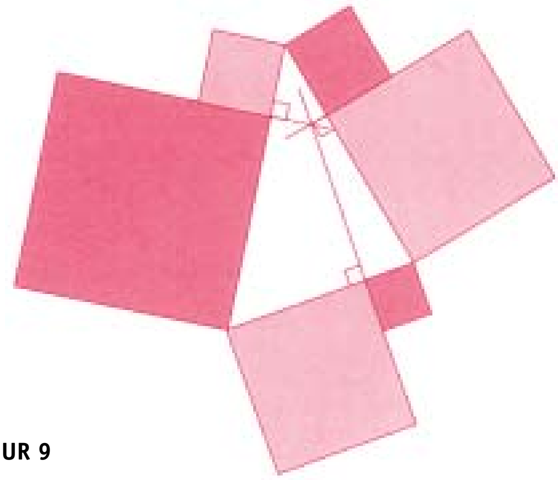
Een fraai plaatje krijgen we als het oog O op een van de zijden ligt, bijvoorbeeld op AB. In figuur 10 is dat het geval. Omdat O dan ook op A_1B_1 ligt, is O het snijpunt van AB en A_1B_1. Dan valt (in de voorgaande notatie) het oog O samen met R.
$PCQRC_1$ is dan een koordenvijfhoek met middellijn CC_1.
Willen we omgekeerd - bij gegeven punten P en Q op respectievelijk BC en CA - een situatie als in **figuur 10** bereiken, dan moeten we voor R het snijpunt kiezen van de cirkel door P, Q en C met lijn AB.
In alle figuren tot nu toe was de vermenigvuldigingsfactor f kleiner dan 1: de spiralen draaiden *naar binnen*. We hebben echter alle vrijheid in de keuze van p, q en r. Het is dan ook eenvoudig ervoor te zorgen dat f groter dan 1 is, zodat de spiraal *naar buiten* draait. Aardig is ook de periodieke draaiing in het geval $f = 1$.
We starten bijvoorbeeld met een gelijkzijdige driehoek ABC. Daarbij geldt: $p + q + r = 1\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot f$. De keuze $p = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $q = \frac{1}{2}$ en $r = 1$ geeft $f = 1$ en we krijgen dan figuur 11.



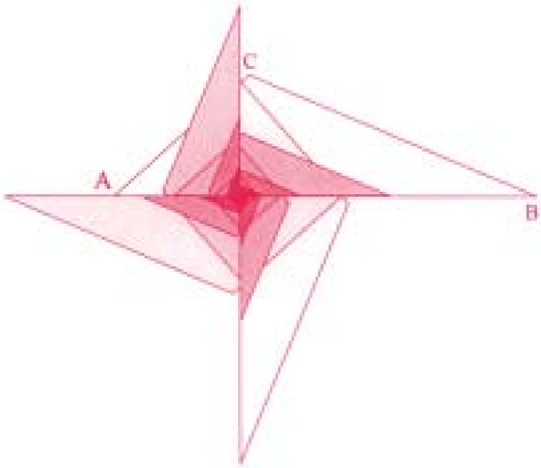
FIGUUR 7



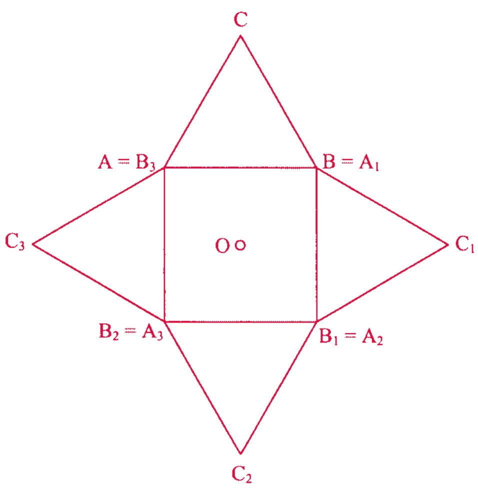
FIGUUR 8



FIGUUR 9



FIGUUR 10



FIGUUR 11

Noten en literatuur

[1] O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, Epsilon Uitgaven 9 (Utrecht, 1987)

[2] Bruno Ernst: Pythagoras in een gewone driehoek, Pythagoras, jrg. 39, nr. 1 (1999)

[3] J.M. Aarts: Meetkunde, Epsilon Uitgaven 47 (Utrecht, 2000)

[4] Profi-examen vwo wiskunde B, 1997 (eerste tijdvak), Nieuwe Wiskrant, jrg. 16, nr. 4, (1997)

Over de auteur

Leon van den Broek (e-mailadres: leon.vandenbroek@wageningse-methode.nl) is als leraar wiskunde aan RSG Pantarijn te Wageningen gedetacheerd aan de KUN. Ook is hij actief als auteur van de Wageningse Methode en van artikelen in Euclides en Pythagoras.

BOTTEMA TEN TWEEDEN MALE: TWEEDE FASE OP NIVEAU

Over een GPS-werkstuk in de Tweede fase, dat door Bottema echt op niveau getild werd.

[Jan van den Brink [n1]]

Satellietbanen

Arjen, Martijn en Wouter, drie vwo-leerlingen, hebben een werkstuk gemaakt. Het onderzoek aan satellietbanen, hun keuze-onderwerp Wiskunde voor de Tweede fase, werd aangezwengeld door het boekje *GPS en wiskunde* [3] en één van Bottema's *Verscheidenheden LIV*, getiteld '*De beweging van een punt over het aardoppervlak*' [1]. Kort geformuleerd ervoeren ze achtereenvolgens: Bottema is ons te moeilijk, Bottema noodzaakt ons tot eigen onderzoek, Bottema geeft uitsluitsel bij twijfel, Bottema spoort aan tot theorievorming. Kortom: dit artikel vertelt hoe Bottema het tweede fase onderwijs op niveau tilde.

Het werkstuk geeft 23 bladzijden lang een goed beeld van de verrassingen en problemen waar de leerlingen tegenaan liepen. Een worstelpartij in rondes, waarin ze verschillende keren een emotionele 'wave' ondergingen. 'We hebben voor GPS (Global Positioning System) gekozen', schrijven ze in hun inleiding, 'omdat het ons interessant leek en omdat er veel meetkundige aspecten aan verbonden waren.' Maar dát viel tegen. In hun 'terugblik' staat: 'In het begin was het nogal saai'. Het was voornamelijk positie bepalen wat de klok sloeg en dat ging hen gemakkelijk af. Daarom waren ze bang dat ook de vervolgonderzoekjes uit het keuzeboek hun werkstuk niet op niveau zouden schroeven, tot ze onderzoek nummer 4 onder ogen kregen: 'Satellietbanen op de grafische rekenmachine...' met daarin een verwijzing naar Bottema's *Verscheidenheden LIV*. Dat leek hen wel wat.

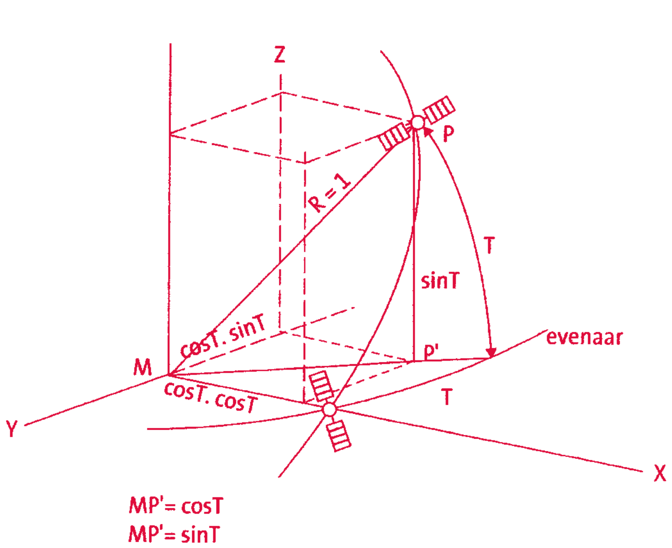
Prompt schreven ze de auteur van het keuzeboek: 'We zijn op zoek naar een wat formelere achtergrond' en vroegen om het genoemde artikel van Bottema. Ze lezen en bestuderen het, schrikken en schrijven: 'Het was nogal frustrerend dat het niet lukte, vanwege onze beperkte kennis, om de stof helemaal te begrijpen. Ook onze leraar moest er een nachtje over slapen'. Ze dreigen te verdrinken in het wiskundig diepe artikel, dat hen echter ook tot 'zwemmen' dwingt, want, uitgedaagd, gaat het driemanschap zelf aan de slag. Zo'n houding past uitstekend om een nieuwe wiskundige structuur onder de knie te krijgen. Tot hun verbazing kunnen ze veel op eigen kracht verklaren, 'zonder al die lastige wiskunde poespas' van Bottema.

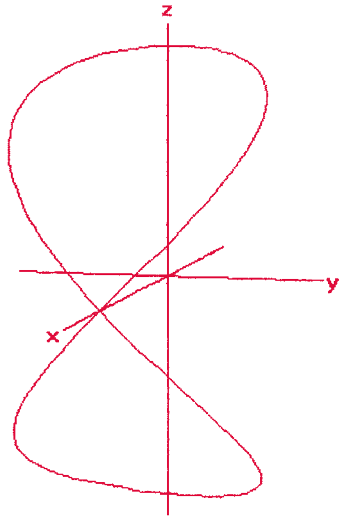
Allereerst laten de leerlingen hun satelliet in de ruimte vliegen volgens een vlakke cirkel en over een bol met straal 1. De vorsers melden daarna enkele merkwaardige verschijnselen. Hoe kan bijvoorbeeld een GPS-satelliet vliegend in een plat vlak dat 60° maakt met het evenaarvlak, de evenaar toch haaks in Noord-Zuid-richting passeren? En hoe kan een polaire satelliet die in 24 uur een hele cirkel via de polen om de aarde vliegt, toch maar een halve aarde overzien?

In hun werkstuk verklaren ze dit soort verrassingen op eigen (wiskundige) wijze. Een satellietbaan is in de ruimte wel een vlakke cirkel, maar zijn projectie op de aardbol ziet er heel anders uit. De aarde draait immers ook zelf onder de satelliet door. Het is dus een kwestie van relatieve bewegingen, en Bottema steunt hen daarin. Zijn analyse gaat daar precies over. De leerlingen starten echter vanaf een andere kant, vanuit een voorbeeld waarin beide bewegingen juist nauw verweven zijn. Dat is vragen om moeilijkheden, maar het drietal zet door. Ze streven ook naarstig naar samenhang. Hun strijd en overwegingen om een coherente beschrijving te vinden voor verschillende soorten satellietbanen, alsmede een veralgemenisering van 'de baan' brengt hen opnieuw in lijn met Bottema.

Het werkstuk

Achtereenvolgens komen de volgende onderwerpen aan de orde: het gebruik van parameterfuncties in de driedimensionale meetkunde; de vraag hoe polaire, geostationaire en GPS-satellieten rond de aarde vliegen, en welke bijzonderheden daaraan vastzitten; de uiteindelijke onderzoeksvragen: 'Hoe ziet een GPS-satellietbaan eruit, in de ruimte?' en 'Hoe, vanaf de aarde gezien?' En tenslotte sluit een overzicht van banen en een veralgemenisering à la Bottema het werkstuk af.





FIGUUR 1 Rechthoekige gelijkbenige boldriehoek [3, p.45, fig. 38]

FIGUUR 2 'Achtvorm'

Polaire satelliet in parameterfuncties

Aangespoord door een figuur (ic. figuur 1) en de tekst uit het keuzeboekje formuleren de leerlingen de baan van een bijzondere satelliet.
Dit is 'een polaire satelliet die een baan van pool tot pool en weer terug beschrijft', vertellen ze en benadrukken: 'in de tijd dat de aarde zelf een rondje draait.'
Ze beschouwen de aardse projectie van deze satellietbaan op een draaiende aardbol met straal 1, en bekijken de twee bewegingen, die van de satelliet en die van de aarde, net als Bottema. Maar daar waar hij ze uit elkaar plukt (hij zet de aarde zelfs even stil), koppelen de leerlingen ze aaneen. Vanuit figuur 1 lezen ze een parametervoorstelling af voor de geprojecteerde baan na verloop van tijd T. (De evenaar ligt in het XY-vlak, de aardas valt samen met de Z-as, P' is de projectie van P op het XY-vlak, M het middelpunt van de eenheidscirkel).
De leerlingen:
$MP' = \cos T$, omdat hoek $PMP' = T$ en $MP = 1$.
Daaruit volgt dat de positie van P geprojecteerd op de X-as is: $\cos T \cdot MP' = \cos T \cdot \cos T$
(want satelliet en aarde draaien even snel, dus hoek $P'M_X$-as = hoek $PMP' = T$; VdB).
De positie van P geprojecteerd op de Y-as is
$\sin T \cdot MP' = \sin T \cdot \cos T$.
De positie van P geprojecteerd op de Z-as is $\sin T$.

Dan maken de leerlingen een ongebruikelijke, maar charmante geste: ze verantwoorden zich voor de gebruikte wiskundige middelen bij dit probleem: 'Bij parameterfuncties geven de waarden van X, Y en Z, uitgedrukt in tijd T, een punt in de ruimte op een bepaald tijdstip'. Gecombineerd met de sinus en cosinus, 'die periodiek zijn, zijn deze parameterfuncties dus goed te gebruiken om satellietbanen aan te geven.'
Voorts projecteren ze in hun hele werkstuk de satellietbanen 'voor het gemak' op een aardbol met straal 1.

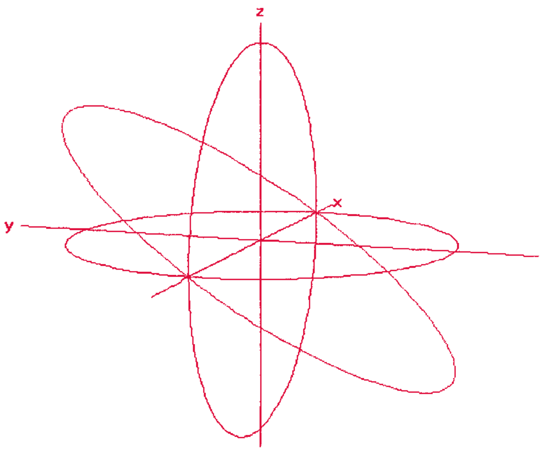
Een verrassende baan

De polaire satellietbaan blijkt een verrassing: hij is, vanuit de ruimte gezien, een vlakke (groot)cirkel van pool tot pool. Maar dat is niet dezelfde baan die je ziet vanaf de aarde, beweert ons onderzoekstrio. 'De satelliet komt niet eens aan beide kanten van de aarde, omdat in de tijd dat de satelliet een halve baan van de ene pool naar de andere pool heeft afgelegd, de aarde 180° is gedraaid. Als de satelliet dan zou doordraaien, zou deze over dezelfde kant van de aarde weer terug gaan'. Een ijzersterke bewering die de absolute beweging en de relatieve beweging aan de kaak stelt en die ze met figuur 2 verduidelijken [n2].

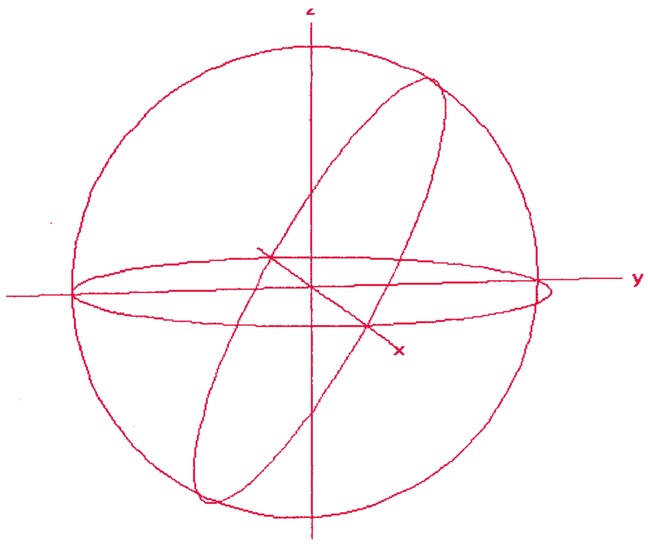
Een misvatting redden

In het werkstuk komen daarna de geostationaire satellieten in zicht.
'Een geostationaire satelliet blijft constant boven een zelfde punt op aarde. Hij heeft dus dezelfde hoeksnelheid als de aarde, en zijn baan (geprojecteerd op een aardbol met straal 1) is te beschrijven met de volgende parameterfuncties:
De positie van P geprojecteerd op de X-as is:
$\cos T \cdot 1$ [straal] $= \cos T$
De positie van P geprojecteerd op de Y-as is:
$\sin T \cdot 1$ [straal] $= \sin T$
De positie van P geprojecteerd op de Z-as is constant.'

De (op aarde geprojecteerde) satellietbaan valt dus volgens de leerlingen samen met een parallelcirkel. Maar dat lukt niet. Een satelliet, vrij vliegend, volgt zonder besturing recht-vooruit-over-de-aardbol een (symmetrische) grootcirkel, terwijl een parallelcirkel op de globe geen grootcirkel is, maar een echte cirkel waarop je zou moeten 'sturen' om erop te blijven (zie [4]). Geostationaire satellieten (TV en telefoon) vind je rond de evenaar [n3], omdat die zowel een parallelcirkel als grootcirkel is. Daar voldoet de baan aan de parameterfuncties van de leerlingen.



FIGUUR 3 Foute baan



FIGUUR 4 'De baan is een cirkel'

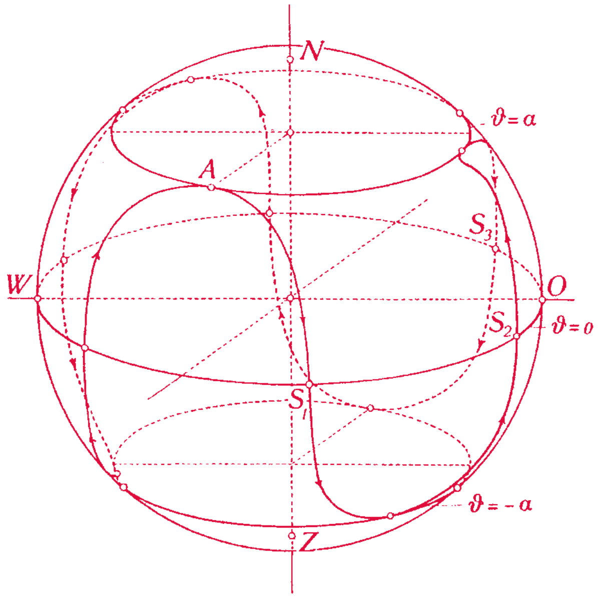
GPS-satellieten

Dan komen de GPS-satellieten met hun bijzonderheden in beeld.
'GPS-satellieten beschrijven een baan tussen 60° noorderbreedte en 60º zuiderbreedte. En over een rondje doen zij 12 uur. Ze 'vliegen' dus tweemaal per dag rond de aarde. Zo'n GPS-baan is eigenlijk een gekantelde (groot)cirkel die een hoek van 60° maakt met de evenaar. Daarom bedachten wij in eerste instantie om de Z-component van de satellietbaan slechts 60° te laten uitwijken'.
De leerlingen doen hier foutieve aannames: is een helling van 60° wel een helling van 60° en moet het verband niet goniometrisch zijn?
De functie voor de GPS-baan zag er volgens hen zo uit:
$X = \cos(T)$
$Y = \sin(T)$
$Z = 0.6 \sin(T)$
Met hulp van de drie projecties op het XY-, YZ- en ZX-vlak op hun grafische rekenmachines maken de leerlingen een schets (zie figuur 3) die hen aan de geformuleerde functie doet twijfelen.
Ze schrijven: 'Op het eerste gezicht lijkt dit aardig op een cirkel die 60º met de evenaar (in het XY-vlak) maakt, maar helaas', luidt hun commentaar, 'het is een ellips!' Ze staven hun bewering met enkele berekeningen. 'De straal van de baan op de X-as is gewoon 1. De straal in het YZ-vlak is niet 1, maar $\sqrt{0{,}6^2 + 1^2} \approx 1{,}17$.
De satellietbaan maakt ook geen hoek van 60° met de evenaar, maar: $\tan^{-1}(0.6 : 1) = 31°$'.
Het klopt van geen kanten; toch gaat het trio moedig verder om te zorgen dat de satellietbaan wél de gezochte cirkel op de bol met straal 1 wordt. Vanuit figuur 3 moeten ze hebben gevonden, dat niet alleen de Z-component met $\sin(60°)$ moet krimpen, maar dat ook de Y-component met een factor $\cos(60°)$ vermenigvuldigd moet worden. Aldus vinden ze voor de 'satellietbaancirkel met de X-as als draai-as [straal 1]' de volgende parameterfuncties:
voor de projectie van de baan op de X-as: $1 \cdot \cos(T)$,
voor de projectie van de baan op de Y-as:
$\cos(60°) \cdot \sin(T)$
en voor de projectie van de baan op de Z-as:
$\sin(60°) \cdot \sin(T)$.
Ze geven de drie projecties van de baan op het XY-, YZ- en ZX-vlak en besluiten bij een schets (zie figuur 4) met: 'Ja, het klopt: de baan is een cirkel'.

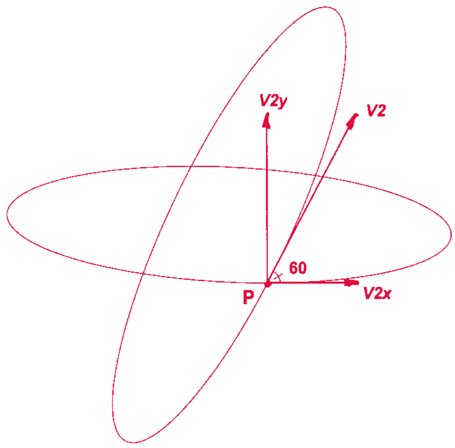
Bottema heeft hen misschien tot deze parameterfuncties geïnspireerd, want soortgelijke formules voor de grootcirkel onder een hoek α met de evenaar zijn ook door hem gebruikt ([1], pag. 66). De leerlingen hebben wellicht hun bijzonder geval (dat $\alpha = 60°$) daarin herkend, ofschoon ze, in tegenstelling tot Bottema, vergaten ook de verschillen in snelheden van de GPS-satelliet en de aarde in hun parameterfuncties op te nemen. Maar in het vervolg van hun werkstuk komt dat onderwerp aan de orde.
Overigens geven noch Bottema, noch de leerlingen een nadere afleiding voor de formules.
Geïnteresseerden worden verwezen naar de tekst in het kader aan het einde van dit artikel.

Projecties op een draaiende aardbol

Tot nu toe bepaalden de leerlingen de 'absolute' cirkelbeweging van de GPS-satelliet stilzwijgend om een stilstaande aarde. Alleen de polaire satelliet uit het begin van het GPS-boekje die slechts vanaf een halve aarde was te zien, bracht de 'relatieve' beweging van de satelliet ten opzichte van de draaiende aarde aan het licht. Ook voor de GPS-baan wilde het onderzoeksteam nagaan 'hoe de baan op het draaiend aardoppervlak eruit ziet'. De ploeg verontschuldigt zich echter bij voorbaat: 'In het artikel van professor Bottema wordt op een zeer ingewikkelde wijze een wiskundig model hiervoor opgesteld (namelijk een tweede assenstelsel verbonden aan een draaiende aarde [1, p.67]). Het zou echter onevenredig veel energie



FIGUUR 5 Uit [1, p.70, fig. 3b]



FIGUUR 6 Snelheidsvectoren

kosten als wij ons volledig in die theorie zouden verdiepen. Voor "bewijzen" verwijzen wij naar dit artikel. Wij maken hem hier alleen aannemelijk'.
Voor de projectie van de GPS-baan op aarde moet men denken aan de witte lijn op een tennisbal, die ze bij Bottema vonden (zie figuur 5).
'Maar hij is niet helemaal van toepassing op GPS-satellieten', relativeren ze hun keuze, 'omdat hier een baan van een projectiel wordt geschetst dat méér dan twee keer per etmaal om de aarde "vliegt", terwijl GPS-satellieten over een rondje 12 uur doen en dus precies tweemaal per etmaal rondgaan.'

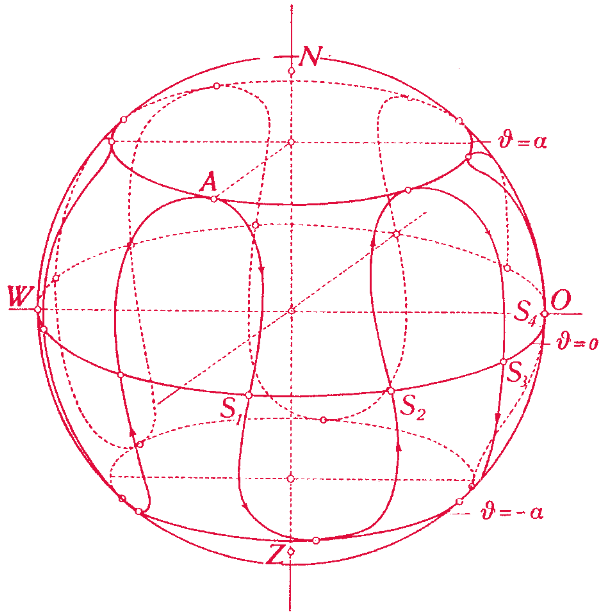
Een verrassend (hoek)punt

Ze gebruiken de tennisbal om een bijzonder punt toe te lichten: het punt waar de projectie de evenaar snijdt. Waarom is dit hoekpunt zo bijzonder?
'Het blijkt dat die hoek (bij GPS-satellieten) 90° is, terwijl de satellietbaan in een vlak ligt dat met de evenaar een hoek van 60° maakt! En daardoor lijkt het alsof in dàt punt de GPS-satelliet even snel als de aarde naar het oosten ronddraait, terwijl hij in werkelijkheid toch twee keer zo snel gaat!'
Hoe zit dat? Met één enkele tekening (zie figuur 6) lossen ze dit probleem van de absolute en relatieve beweging op.
'Punt P is het punt waar de satelliet zich bevindt op het moment dat deze over de evenaar gaat. Op dat moment heeft de satelliet de vaste (hoek)snelheid $V2$. De X-component heet in de illustratie $V2x$. Als we $V2$ voor het gemak 1 noemen, is $V2x$ bij een hoek van 60° gelijk aan: $\cos(60°) \cdot 1 = 0{,}5$, dus even groot als de [hoek]snelheid van de aarde [de satelliet heeft immers een twee keer zo grote hoeksnelheid als de aarde].'
Bottema zelf toont aan ([1], pag. 69): als de hoeksnelheden ω_1 van de satelliet en ω van de aarde voldoen aan de verhouding (met hoek a tussen het satellietvlak en het evenaarvlak), dan is de relatieve doorgang met de evenaar op de bol altijd onder een hoek van 90°.

Met figuur 6 voor ogen is dat goed in te zien. Maar het onderzoeksdrietal zag ook iets anders.

Een andere hoek: een andere baan

Hoe ziet de projectie van de satellietbaan in het snijpunt met de evenaar eruit 'als de satellietbaan zelf een andere hoek met de evenaar maakt dan 60°?' (bij gelijkblijvende snelheid).
De leerlingen stellen zich die vraag, misschien ingegeven door Bottema ([1], pag. 69, en verder), maar beantwoorden hem op hun eigen wijze: 'Als de GPS-satelliet een baan beschrijft die een hoek maakt met de evenaar die groter is dan 60° [bijvoorbeeld 71°], kunnen we de snelheidsvector weer ontbinden. Noem de snelheid van de satelliet weer 1. Deze is nog steeds twee keer zo groot als de snelheid van de aarde. De X-component van deze snelheidsvector heeft dan de grootte: $\cos(71) \cdot 1 =$ ongeveer 0,326, en dat is maar 65% van de snelheid van de aarde. Die is immers 0,5 van de snelheid van de satelliet. Dus de satelliet beweegt ondanks het feit dat deze twee keer zo snel gaat als de aarde, vanaf de aarde gezien achteruit!'
Verbijstering. Is dat zo? Bottema biedt zekerheid met figuur 7.
'Het is duidelijk te zien dat de projectie een terugwaartse beweging maakt. Dit kan dus alleen (bij een satelliet die twee keer zo snel gaat als de aarde) als de hoek α van de baan met de evenaar groter is dan 60°, want dan is $\cos(\alpha) < 0.5 = \cos(60°)$'. Ook het geval dat de hoek kleiner is dan 60°, 'bijvoorbeeld 42,4°', wordt onderzocht: '... je ziet dan vanaf de evenaar de satelliet met snelheid naar het oosten bewegen'. De leerlingen stellen vast dat de hoek a van de doorgang van de baan met de evenaar en de snelheidsverhouding van satelliet en aarde de vorm van de satellietbaan bepalen [n4].
Tot slot laten de leerlingen nog de snelheid van de satelliet veranderen bij gelijkblijvende hoek α en komen ze met een vlijmscherpe algemene formulering: 'De hoek $\alpha(n)$ van de satellietbaan waarbij de X-



FIGUUR 7 Uit [1, p.70, fig. 3c]

component van de snelheidsvector van de satelliet even groot is als de snelheid van de aarde bij het passeren van de evenaar wordt groter als de snelheid van de satelliet bijvoorbeeld n keer groter wordt.
Algemeen geldt dan: $\alpha(n) = \cos^{-1}(1/n)$'.
Dit past geheel in de al eerder genoemde overwegingen van Bottema ([1], pag. 69).

Terugblikkend

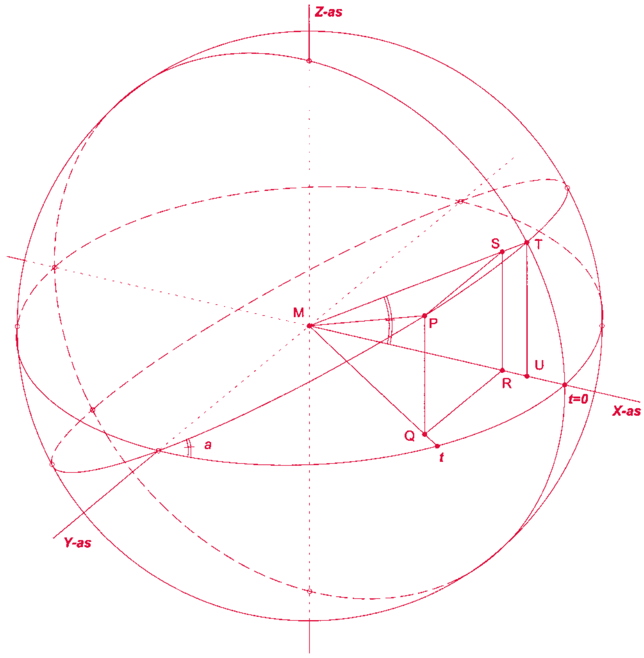
Ze besluiten hun werkstuk met een literatuurlijst en een overzicht van de onderzochte satellietbanen in de ruimte en hun projecties op de aardbol. In hun 'terugblik' schrijven ze: 'We zijn erg tevreden over het niveau dat we tenslotte hebben bereikt, en de dingen die we hebben ontdekt. De angst voor een té gemakkelijk keuze-onderwerp was geheel ongegrond'.
De leerlingen zijn alle drie geslaagd voor het vwo-examen.
Martijn, met profiel Natuur en Techniek, studeert nu elektrotechniek aan de TU Delft. Een jaar na het werkstuk kijkt hij in een e-mail aan mij terug:
'Ik denk nog vaak aan mijn wiskunde op school: hoe leuk ik het altijd vond tijdens de wiskundelessen, voor een groot deel dankzij Ramiro. (VdB: Ramiro Wanga, hun leraar). Met name de werkstukken over GPS en het artikel van de heer Bottema waren een uitdaging om, samen met Arjen en Wouter, een eigen "vertaling" te bedenken. Ik weet nog goed dat toen wij onze interpretatie aan Ramiro gingen uitleggen, zonder de theorie volledig te begrijpen, wij het ook in onze woorden en met onze voorkennis, aan onszelf hadden uitgelegd. Iets moeilijks voor jezelf duidelijk maken, en dat ook graag willen, dat is eigenlijk het belangrijkste wat wij toen geleerd hebben [naast wat nieuwe wiskundige methodes]. Dat is de kracht van wiskunde in de Tweede fase'.

Afleiding van de satellietbaan-formules voor een bewegende satelliet over een stilstaande bol [1, p.66]

Kies een vast rechthoekig assenstelsel $OXYZ$ (zie figuur 8).
M in O is het middelpunt van de eenheidsbol: 'de aarde'.
MZ is de (rotatie)as van de eenheidsbol, XMY is het equatoriale vlak.
Elke satellietbaan is een grootcirkel over de stilstaande eenheidsbol.
Kies de satellietbaan waarvoor het vlak van satellietbaan het vlak XMY snijdt in MY, onder een hoek a.
Op het tijdstip $t = 0$ is satelliet P in het hoogste punt T van zijn baan.
U is de projectie van T op XMY. Dan ligt U op MX en is hoek $TMU = a$ ($TU = \sin a$ en $MU = \cos a$).
Op tijdstip t heeft de satelliet boog TP afgelegd langs de grootcirkel met hoeksnelheid w'.
De boog TP is $w't$.
Stel X, Y, Z zijn de coördinaten van P.
Te bewijzen:

$$X = \cos a \cdot \cos w't,\ Y = \sin w't,\ Z = \sin a \cdot \cos w't \qquad (1)$$

Bewijs:
Construeer een vlak door P evenwijdig aan vlak YMZ en laat $PQRS$ daarin een rechthoek zijn met PQ loodrecht op vlak XMY (Q in XMY) en waarin PS evenwijdig is aan MY (S in XMZ) en R op MX.
Dan ligt S op MT (omdat PS evenwijdig is aan MY in het vlak van satellietbaan) en is driehoek MSP rechthoekig in S en geldt: $PS = \sin w't = RQ = Y$, $MS = \cos w't$.
De driehoeken MRS en MUT zijn gelijkvormig, dus geldt:
$MS : MT = SR : TU$, ofwel $\cos w't : 1 = Z : \sin a$, ofwel $Z = \sin a \cdot \cos w't$.
En geldt
$MS : MT = MR : MU$, ofwel $\cos w't : 1 = X : \cos a$, ofwel $X = \cos a.\cos w't$ □



FIGUUR 8 Assenstelsel en eenheidsbol

Toelichting op de formules voor een stilstaande satelliet boven een draaiende bol

Een tweede rechthoekig assenstelsel xyz wordt aan de aarde verbonden. De formules bij een ruimtelijk stilstaande satelliet, in het punt (X, Y, Z), boven een draaiende aarde (in oost-west-richting met snelheid w in tijd t) bestaat uit een assenrotatie in het (equatoriale) vlak van xy naar XY over hoek wt, en constante $Z = z$. Daarom:

$$X = x \cos wt - y \sin wt$$
$$Y = x \sin wt + y \cos wt \qquad (2)$$
$$Z = z$$

Door eliminatie van X, Y en Z uit (1) en (2) wordt de relatieve beweging van een bewegende satelliet over een draaiende aarde in coördinaten x, y, z als functies van t bepaald:

$$x = \cos a \cdot \cos w't \cdot \cos wt + \sin w't \cdot \sin wt$$
$$y = -\cos a \cdot \cos w't \cdot \sin wt + \sin w't \cdot \cos wt;$$
$$z = \sin a \cdot \cos w't$$

(zie ook [1], pag. 66 en 67).

Noten

[n1] Met dank aan Marja Meeder, Aad Goddijn en enkele mij onbekende beoordelaars voor hun opmerkingen.
(Red.: Die 'onbekende beoordelaars' vormden de speciaal voor dit Bottema-nummer geformeerde leesredactie van Euclides, in de wandeling ook wel het B-team genoemd.)

[n2] Men kan deze polaire satellietbaan beschouwen als de doorsnede van een bol met een aan de bol rakende cilinder (of Möbiusband), als de zogenoemde 'Viviani kromme', als vensters in een koepel.
Zie: R. Caddeo, S. Montaldo, P. Piu: The Moebius Strip and Viviani's Windows, in: The Mathematical Intelligencer, 23, 3 (2001), 36-39.

[n3] Bij deze geostationaire satellieten kan men zich afvragen, hoe hoog zo'n satelliet moet vliegen om boven dezelfde plek te blijven. Dit is vragen om een nieuw onderzoek door leerlingen, waarbij baansnelheid, zwaartekrachtrelaties en de derde wet van Kepler kunnen tonen dat de hoogte niet gering is, namelijk 5,5 keer de straal van de aarde (zie: Natuur & Techniekkalender, 23 en 24 oktober 2001).

[n4] Computerapplets van satellietbanen ontworpen door Peter Boon (Freudenthal Instituut) zijn op deze twee parameters gebaseerd en zullen het onderzoek van verschillende banen door leerlingen erg aantrekkelijk maken. Vanaf februari 2002 zijn ze op het Wisweb te bekijken.

Literatuur

[1] O. Bottema: 'Verscheidenheden LIV: De beweging van een punt over het aardoppervlak', Euclides 39, (1963/64), pp.65-75.
In 1977 is dit artikel overgenomen in O. Bottema: Verscheidenheden, Groningen, pp.82-92.

[2] Martijn Booy, Arjen Alink, Wouter Frigge: Satellietbanen in de ruimte, (werkstuk), Nijmegen (2000)

[3] Jan van den Brink: GPS en wiskunde, Wolters-Noordhoff (Groningen, 2000)

[4] Jan van den Brink: 'Foucault en de bolmeetkunde (2), sturen op de bol die stuurde', Euclides 74, 2, (1998), pp.39-43

Op het WWW

[] http://www.fi.uu.nl/experimenteel/gps
[] http://gps.pagina.nl/
[] http://www.gpsy.com/gpsinfo/gps-faq.html
[] http://www.colorado.Edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html

Over de auteur

Dr. Jan van den Brink (1942; e-mailadres: janvdb@fi.uu.nl) was onderwijzer, studeerde wiskunde (lo, mo, doctoraal zuivere wiskunde) en is werkzaam als ontwerper/onderzoeker van reken- en wiskundeonderwijs aan 4-18-jarigen aan het Freudenthal Instituut. Zijn belangstelling gaat vooral uit naar wiskunde die ontdekt of uitgevonden wordt door leerlingen ten einde daarbij passend onderwijs te ontwerpen en te onderzoeken.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Verenigingsnieuws

Van de bestuurstafel

Jaarrede 2001

[Marian Kollenveld]

Lustrum

Het afgelopen jaar heeft in het teken gestaan van de viering van ons lustrum. We kunnen terugkijken op een succesvol jaar. We bewaren mooie herinneringen aan ons tweedaags lustrumcongres. Het was een feestelijke gebeurtenis waar veel mensen met groot plezier bezig waren met wiskundige en randactiviteiten.
De Minister kreeg daar het eerste exemplaar van het lustrumboek aangeboden, over 100 jaar wiskunde-onderwijs. We hebben ook voor u nog wat exemplaren in voorraad. Ze worden u nog steeds aangeboden voor een vriendenprijsje, onder de kostprijs (zie de Servicepagina in dit nummer en natuurlijk onze website).
Ook waren we in de gelegenheid om elk lid van de vereniging een blijvend aandenken te geven in de vorm van een poster met een boom van Pythagoras. En we gaan nog even door met uitdelen.
Als vervolg op ons lustrumproject De Nationale Doorsnee voor eerste-en tweedeklassers is zojuist een boek verschenen. Dit boek bevat naast de uitslagen van het project lesmateriaal voor in de klas. Verder kunnen uw leerlingen zelf met de databestanden van de DND aan de slag omdat ze geschikt zijn gemaakt voor het programma VU-Stat dat op vrijwel alle scholen aanwezig is. Het boek (met poster) wordt gratis toegezonden aan alle scholen die hebben meegedaan, en bovendien uitgedeeld aan alle aanwezigen op deze studiedag. Waarmee we, denk ik, het lustrumjaar in dezelfde stijl besluiten als waarmee we begonnen: anderen te laten delen in de feestvreugde, en iets te laten zien van het leuke en interessante van de wiskunde.

The party is over

Het feest is voorbij en het lijkt wel of er inderdaad een nieuwe tijd is aangebroken, een waarin het optimisme over vernieuwing en mogelijkheden tot verandering omslaat in een wat negatievere toonzetting. De basisvorming de facto afgeschaft, de Tweede fase struikelend van maatregel naar maatregel, en over het nieuwe vmbo worden ook sombere verhalen gehoord.
Onderwijsvernieuwing in Nederland kent vaak een jarenlange voorbereiding in diverse organen en instituties, het ontwikkeltraject is lang en kan zorgvuldig zijn. Maar vernieuwing wordt pas werkelijkheid in de klas, in het onderwijs zoals dat door de docent verzorgd wordt. En helaas is de tijd en het geld vaak op als de school in beeld komt. De docent is in het algemeen matig voorbereid of geïnformeerd, krijgt ook niet de tijd om zich voor te bereiden en moet het maar uitvoeren zoals anderen hebben bedacht, op eigen houtje, en hij moet vaak ook nog meer doen in minder tijd.
Vandaar een beleidsarme invoering van de basisvorming die nauwelijks anders kon dan mislukken en een van meet af struikelende Tweede fase.

Echte vernieuwing vraagt echte investering, en dat is groot geld, want er zijn veel scholen en veel leraren. Een eerste vereiste is het terugbrengen van het maximum aantal te geven lessen tot een normaal Europees niveau, zodat de docent tijd krijgt om zich te verdiepen in nieuwe onderwerpen en nieuwe didactiek, goede praktische opdrachten kan verzinnen, enzovoorts, enzovoorts. Kortom, al die dingen doen die noodzakelijk zijn om blijvend, en met plezier, op een professioneel verantwoord peil te functioneren. Op de korte termijn vergroot dit weliswaar het lerarentekort, maar doorgaan op de huidige voet betekent dat veel ouderen voortijdig afhaken, er nauwelijks jongeren in het onderwijs aan de slag willen, en er ook nog een treurigmakende uitstroom is van jonge leraren die het na een paar jaar voor gezien houden. Dat is kapitaalvernietiging die we ons niet kunnen veroorloven. Er is eigenlijk geen keus: alle pogingen om nieuwe mensen naar de school te lokken zijn tot mislukken gedoemd als de situatie op school, de arbeidsomstandigheden daar, niet verbeteren.

Tweede Fase

Verlichtingsmaatregelen

Sinds de invoering van de Tweede fase zijn er voor wiskunde vele tien-tallen wijzigingen doorgevoerd, soms na consultatie en gedragen door het veld, soms – zoals afgelopen zomer - op onverklaarbare wijze door de Tweede Kamer gedropt, zodat er voor betrokkenen inmiddels geen lijn meer te bespeuren valt. Zo is het niet a priori duidelijk waarom periodieke functies wel in het vmbo maar niet in het havo-wiskunde-b-programma behandeld moeten worden. Wellicht kunt u zich nog herinneren dat die-zelfde Tweede Kamer bij het invoeren van de basisvorming er nog maar ternauwernood van weerhouden kon worden die andere periodieke functie, de tangens, verplicht in de basis-vorming onder te brengen.
Voortschrijdend inzicht of volstrekte slordigheid? De farce rond de continue dynamische modellen in het vwo doet het ergste vrezen.

Het bestuur heeft inmiddels in een brief aan de staatssecretaris uiting gegeven aan haar ongenoegen over deze gang van zaken en verzocht om in de toekomst wederom als ter zake kundige betrokken te worden bij voorgestelde wijzigingen in het examenprogramma.
Daarnaast is het bestuur van mening dat een heldere discussie over omvang en zwaarte van het programma pas kan worden gevoerd als er een eind is gemaakt aan de grote onderlinge verschillen tussen scholen met betrekking tot de toegewezen contact-tijd.

Echte vernieuwing vraagt echte investering

Adviestabel
De open brief aan schooldirecties over de noodzaak van een voldoend aantal contacturen voor wiskunde is door veel collega's aangegrepen om het gesprek met de directie aan te gaan. In sommige gevallen met resultaat, in sommige niet. Als gevolg van de toegenomen autonomie van scholen moet dat gevecht helaas op elke school gevoerd worden. Het bestuur gaat onverdroten door met haar pogingen om centrale instanties ertoe te bewegen op dit terrein enige eigen verantwoordelijkheid te nemen. We hebben voor dat doel een adviestabel ontworpen op basis van 50% contact-tijd, volgens ons minimaal nood-zakelijk. Hij is vandaag beschikbaar in de stand en de tekst staat natuurlijk ook op onze website.

Formulekaart
De problemen met de formulekaart voor havo en vwo lijken opgelost. Inmiddels is er overleg geweest met alle betrokkenen, waarbij we gelukkig afspraken hebben kunnen maken die ertoe gaan leiden dat leerlingen op het examen in principe allemaal de beschikking hebben over dezelfde formules. Het nomenclatuurrapport van de vereniging en de door de vereniging samengestelde formule-kaart Wisforta zijn daarbij richting-gevend. Het nomenclatuurrapport is nog steeds voor leden gratis te verkrijgen bij de ledenadministratie.

De basisvorming
Misschien weet u het nog: in 1999 gaf de inspectie het wiskundeonderwijs in de basisvorming een klein zesje.
In 2000 deed Nederland mee aan een internationaal vergelijkend onderzoek bij 15-jarigen op het gebied van begrijpend lezen, wiskunde en de natuurwetenschappelijke vakken onder de naam PISA.
De resultaten daarvan zijn op dit moment nog niet bekend, maar we halen zeker meer dan dat zesje. In Euclides zult u er ongetwijfeld binnenkort meer over lezen. Mogelijk dat er dan door deskundigen weer allerlei relativerende opmerkingen worden gemaakt, naar Hollands aard en vaak ook wel terecht.

Algebragroep
De grafische rekenmachine heeft invloed op het onderwijs in de analyse, een verdergaande stap in de richting van computeralgebra noopt tot bezinning over het algebra-onderwijs. Vandaar dat het bestuur dit jaar een algebragroep heeft opgericht met het verzoek hierover nadere gedachten te ontwikkelen en zo mogelijk te komen tot een voorstel voor een leerlijn algebra, rekening houdend met de beschikbare moderne technologie. Deze groep heeft een discussiestuk gemaakt dat vandaag voor iedere deelnemer beschikbaar is. We zijn benieuwd naar uw reacties, er is ook een werkgroep gewijd aan dit onderwerp.
Er bestaan plannen om op beperkte schaal met een beperkt aantal scholen te experimenteren met het gebruik van de computer tijdens het centraal examen vwo voor A1 en A12.
Voorzichtiger kan ik het bijna niet zeggen, want het is nog in een heel pril stadium. Zodra deze plannen enige substantie krijgen zult u verder worden geïnformeerd.

Hbo en mbo
Dit jaar is de instroom van het hbo voor het merendeel volgens nieuwe programma's opgeleid. Ondanks de voorlichting die aan hbo-instellingen is gegeven is over de veranderde wiskundeprogramma's in het mbo en havo/vwo, is onze indruk dat op een flink aantal instellingen dit niet is doorgedrongen tot de wiskundesecties. Dit leidt tot zulke zaken als het veronderstellen dat mbo-ers kunnen integreren en het verbieden van het gebruik van de GR. De beoogde verbeterde aansluiting is dus nog niet optimaal bereikt. Dit is een zorgelijke zaak die het bestuur onder de aandacht van betrokkenen zal brengen.

Op het hbo is er een tendens om wiskunde als apart vak van de lessentabel te laten verdwijnen als gevolg van onderwijsvernieuwingen als projectonderwijs en probleem-gestuurd onderwijs. De Werkgroep HBO probeert een Wiskunde Netwerk op gang te krijgen om de integratie van de wiskunde in de diverse doel-vakken goed en modern te laten verlopen. De werkgroep heeft veel werk verzet om velen te interesseren voor dit plan. Helaas is een eerste ver zoek om subsidie afgewezen, maar de werkgroep laat zich hierdoor niet uit het veld slaan (zie voor verdere informatie onze website).

Verenigingsnieuws

Vmbo

Anders dan in havo/vwo is er geen differentiatie in het wiskunde-programma in het vmbo. Het bestuur is van mening dat ook elke sector in het vmbo een eigen wiskunde vraagt en zal met het ministerie in overleg treden om op dit punt te vragen om een herbezinning op de programma's.
Het ministerie heeft een project gestart om ondersteunend lesmateriaal te ontwikkelen voor de zwakste leerlingen in het leerweg-ondersteunend onderwijs, ook voor wiskunde. Het bestuur is blij met aandacht voor deze leerlingen, maar meent dat lesmateriaal alleen niet voldoende is, maar dat het ook gaat om ondersteuning van leraren bij de hantering van een adequate didactiek voor deze leerlingen.

Zebra

We naderen het eerste dozijn en we zijn er trots op. Na een weifelende start begint op veel scholen de invoering van de zebra-ruimte vorm te krijgen, waarbij onze Zebrareeks prima gebruikt kan worden. Ook buiten het voortgezet onderwijs vinden de boekjes hun weg.
Nogmaals een oproep: we hechten eraan dat de boekjes worden geschreven door duo's, met daarbij één docent; dus, hebt u tijd voor en zin in mee te schrijven aan zo'n boekje, meldt u dat dan aan ons.
Mocht u overigens iets anders voor uw vereniging willen doen, aarzelt u dan vooral ook niet.

Euclides

Ons blad is het visitekaartje van de vereniging. Voor veel leden, met name zij die nu niet hier zijn, is het een belangrijke bron van informatie over de vereniging en de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs. Het blad moet daarom actueel en aantrekkelijk zijn qua vorm en inhoud. In het jubileum-jaar hebben we daarom een grondige verandering van de vorm door-gevoerd, in de richting van een meer grafisch ontwerp. En u heeft ongetwijfeld gezien dat Euclides na de sombere blauwe nu in een roze periode is beland. Of dit samenhangt met het feit dat we met ingang van dit jaar voor het eerst in de geschiedenis een vrouwelijke hoofd-redacteur hebben, is een vraag die ik niet vermag te beantwoorden.
Wel kan ik u zeggen dat het bestuur er alle vertrouwen in heeft in Marja Bos een waardige opvolger gevonden te hebben van Kees Hoogland, die het blad de afgelopen jaren met grote inzet heeft geleid. Het bestuur wil ook hier graag nogmaals haar grote waardering uitspreken voor het vele werk dat Kees voor het blad heeft gedaan; we zijn hem daarvoor erkentelijk. Onder zijn leiding heeft het blad gewonnen aan actualiteit en dat wordt door bestuur en leden zeer gewaardeerd. We wensen Marja Bos sterkte en vreugde bij deze boeiende, maar ook verantwoordelijke taak.

Website

De website is een zo mogelijk nog actuelere bron van informatie die heel succesvol is. Elke dag zijn er enkele honderden bezoekers, met een uitschieter van 8000 bezoeken in de examenmaand mei. Een ander blijk van erkenning van de kwaliteit is het feit dat inmiddels op officiële sites, als die van het Ministerie van Onderwijs, verwezen wordt naar onze website, omdat daar alles duidelijk staat, en meestal correct.
Het komend jaar zal de website van uiterlijk veranderen om de vele informatie nog beter toegankelijk te maken. Het bestuur bezint zich ook op mogelijkheden om gedeelten van de site slechts toegankelijk te maken voor leden.
De webmasters van de diverse wiskundesites hebben in onderling overleg, binnen het WisKids-project, de vraagbaak WisFaq opgericht, een prachtig initiatief, waar u en ouders, leerlingen en studenten terecht kunnen voor al uw vragen op wiskundegebied. Zelfs vragen over polynoomringen worden beantwoord naar ik heb vernomen. Zo leren de webmasters soms ook nog wat bij.
En het WereldwiskundeFonds heeft de website ook ontdekt voor haar activiteiten. Maar daar hoort u straks meer over.

Toekomst van de vereniging

Het ledental loopt licht terug, de inkomsten uit contributies dus ook. We proberen additionele bronnen van inkomsten te vinden door te participeren in publicaties, zoals de Zebra-reeks en het formuleboekje Wisforta. En vers van de pers zijn er vandaag herziene uitgaven van de opgavenbundels voor havo wiskunde B en wiskunde A verschenen, traditie-getrouw onder redactie van de NVvW.
Daarnaast is het voor de continuïteit van belang om nieuwe leden te werven. Binnenkort starten we met een grote ledenwervingsactie. In samenwerking met de andere vak-inhoudelijke verenigingen zal dan elke docent die nog geen lid is van een vereniging, persoonlijk een folder met wervende tekst ontvangen die hem/haar uitnodigt lid te worden. Mocht u dus zo'n mooi groen folder-tje zien in handen van uw wiskunde-collega, grijp uw kans. Een goed gesprek zegt vaak meer dan de fraaiste folder. De kracht van de vereniging wordt immers bepaald door het enthousiasme van haar leden.

Ten slotte

We boffen; vorig jaar, ons lustrum-jaar, was het internationaal jaar van de wiskunde en dit jaar is het jaar van de vrijwilligers. Een mooi moment om even de schijnwerpers te richten op al die mensen zonder wier belangeloze inzet de vereniging er eenvoudigweg niet zou zijn.
Belangeloos, maar zeker niet zonder belang. Een vereniging als de onze kan niet zonder al die leden die tijd stoppen in wat hen aan het hart gaat:

het bevorderen van de kwaliteit van het wiskundeonderwijs in Nederland. In al onze commissies, inhoudelijk en organisatorisch, examenbesprekingen, website, de werkgroepen: vmbo, havo/vwo, mbo, hbo, regiodagen, jaarvergadering/studiedag, Euclides, pr, WwF, zebra, algebragroep, vrouwen en wiskunde en het bestuur (en ik hoop dat ik alles gehad heb) werken mensen met hart voor de club, onze club. We willen ze graag heel hartelijk danken voor hun inzet en vragen u dit te ondersteunen met een applaus.

Dank u wel.

Persbericht: Wereldwiskunde Fonds

Het WWW opnieuw uitgevonden! WereldWiskundeWeb: de internet-boekenveiling van het Wereldwiskunde Fonds

Met blijdschap geven wij kennis ....

Het Wereldwiskunde Fonds (*) is verheugd eventuele belangstellenden via deze weg op de hoogte te stellen van een nieuw initiatief, namelijk het WereldWiskundeWeb (WWW).

Jaarlijks organiseert het WwF op de jaardag van de NVvW een boekenmarkt waarvan de baten deels ten goede komen aan wiskundeonderwijsprojecten in de derdewereld. Dit brengt nogal wat gesleep met boeken met zich mee en bovendien is duidelijk dat lang niet alle potentiële aanbieders en potentiële kopers worden bereikt.
Geïnspireerd door het succes van (boeken-)veilingen via internet rijpte bij de werkgroep het idee om deze traditionele boekenmarkt te vervangen door een veiling (bij opbod) via internet: het WereldWiskundeWeb *(http://www.nvvw.nl/www)* in de hoop voornoemde nadelen het hoofd te kunnen bieden.
Op deze site treft men het totale aanbod van de boeken die de werkgroep in de aanbieding heeft.
Bedoeling is dat geïnteresseerden een bod doen op een of meer van deze werken waarna men, indien binnen een vastgestelde periode geen hoger bod volgt, zich eigenaar mag noemen van deze werken. Na betaling van de geboden bedragen en de ermee samenhangende portokosten worden de gekozen boeken naar het adres van de gelukkige gestuurd.

Tijdens de jaarvergadering van de Nederlandse Vereniging voor Wiskundeleraren van 17 november j.l. is de site voor het eerst in gebruik genomen.

(*)
Het Wereldwiskunde Fonds (WwF) is een werkgroep die deel uitmaakt van de NVvW met als doel ondersteuning van het wiskundeonderwijs in derdewereldlanden door middel van financiële bijdragen aan nader te bepalen projecten;
wiskundedocenten 'hier' te laten zien dat er 'daar' ook collega's zijn die zich met soortgelijke, maar ook heel andere vragen en problemen bezig houden dan zij zelf.
Het WwF verkrijgt fondsen uit bijdragen van de leden van de NVvW en diverse acties, zoals de verkoop van oude/gebruikte wiskundeboeken.

Secretariaat:
Gerben van Lent, Admiraliteitskade 21 H, 3063 ED Rotterdam
e-mail: jonglent@worldonline.nl

De Wiskunde Scholen Prijs 2002

[Heleen Verhage]

Ook als u zelf denkt dat u niets bijzonders doet op school, kan uw school in aanmerking komen voor het winnen van de Wiskunde Scholen Prijs. Deze prijs is ingesteld om scholen te stimuleren met hun sterke punten op het gebied van wiskunde-onderwijs naar buiten te treden.

Alle scholen voor voortgezet onderwijs kunnen meedingen naar deze prijs. Er zijn drie categorieën waarin een school een prijs kan winnen:
- basisvorming (klas 1 en 2),
- bovenbouw vmbo (klas 3 en 4),
- havo/vwo (de klassen 3 t/m 6).

Wat valt er te winnen?
Scholen die meedoen dingen mee naar de hoofdprijs van 2000 euro. Daarnaast is er voor elke categorie een eerste prijs van 1000 euro te winnen. Doel van deze prijs is om goede initiatieven binnen wiskunde-onderwijs zichtbaar te maken voor iedereen. Door met uw goede ideeën naar buiten te treden, bewijst u dus ook uw collega's een dienst.

In december 2001 is naar alle scholen een folder gestuurd met nadere informatie over de Wiskunde Scholen Prijs. Heeft uw school belangstelling om mee te doen, stuur dan het antwoordkaartje in dat bij de folder zit. In de tweede helft van januari ontvangt u dan nadere informatie. U kunt zich ook aanmelden via http://www.fi.uu.nl/wiskids (kies daar 'Scholenprijs').

De Wiskunde Scholen Prijs is een onderdeel van het WisKids project, een gezamenlijk initiatief van wiskundig Nederland.
Doelen van WisKids zijn: het bevorderen van enthousiasme bij jongeren, het imago van wiskunde verbeteren, jongeren uitdagen via de wiskunde, belangstelling voor de exacte vakken bevorderen.
Partners in WisKids zijn Ratio (KUN), STW/NWO, NVvW, Vierkant voor Wiskunde, Pythagoras, Wiskunde Olympiade, Freudenthal Instituut.
WisKids is financieel mogelijk gemaakt door OC&W, Axis, FME-CWM. De Wiskunde Scholen Prijs wordt mede gesponsord door de NOCW.

Heleen Verhage
(e-mailadres: h.verhage@nvvw.nl)
Freudenthal Instituut
Postbus 9432, 3500 GK Utrecht
tel.: 030 2611611, fax: 030 2660430

De Nationale Doorsnee
De resultaten

De resultaten van het statistiek-project *De Nationale Doorsnee* voor klas 1 en 2 zijn verwerkt in een slot-publicatie bedoeld voor scholen. Het doel van deze publicatie is om bij wijze van follow-up op het project concrete handreikingen te geven voor een serie statistieklessen rond de DND-uitslagen. De publicatie bestaat uit een boek, een cd-rom en een poster.

Het boek bevat
- een overzicht van de uitslagen van DND in de vorm van tabellen en grafieken;
- een bewerking van het eerder bij DND ontwikkelde aanvullende lesmateriaal;
- een statistische analyse van de uitkomsten;
- handreikingen voor dataverwerking van DND-bestanden met VU-Stat.

De cd-rom bevat ondermeer een serie DND-databestanden in VU-Stat formaat en een hulpprogramma waarmee steekproeven getrokken kunnen worden uit het volledige (geanonimiseerde) DND-databestand van ruim 50.000 records.

De poster met tabellen en grafieken van de uitslagen is bedoeld om op te hangen in de klas. Met deze poster kunnen leerlingen de resultaten van eigen onderzoek vergelijken met de landelijke resultaten.
Deze publicatie is reeds uitgereikt aan de deelnemers aan de studiedag van de NVvW van 17 november 2001 en wordt tevens toegezonden aan alle deelnemende scholen.
Overige belangstellenden kunnen deze publicatie (inclusief cd-rom en poster) schriftelijk of per e-mail bestellen bij de ledenadministratie (zie het colofon voor de adressen).

Prijs:
€ 12,00 voor leden van de NVvW;
€ 14,50 voor niet-leden van de NVvW

In beide gevallen is het bedrag inclusief verzendkosten.


22 maart 2002
Doe mee!
voor alle leerlingen van klas 1 t/m 5
EUROPESE KANGOEROE
WISKUNDEWEDSTRIJD

Aankondiging 'Studiegroep Wiskunde met de Industrie' en wetenschapsmagazine 'Natuur & Techniek' /

Leerlingen gaan verspreiding euromunten meten

Duitsland produceert met 35,4% verreweg de meeste euromunten. Zijn in de loop van volgend jaar de muntjes in onze portemonnees voor een derde deel van Duitse oorsprong? Het wetenschapsmagazine '*Natuur & Techniek*' en de '*Studiegroep Wiskunde met de Industrie*' zijn op 1 januari 2002 een uniek experiment begonnen om de wiskunde van de verspreiding van euromunten te toetsen, een en ander in samenwerking met Nederlandse en Vlaamse scholen: leerlingen gaan maandelijks inventariseren hoeveel buitenlandse euromunten zij op zak hebben.

De verspreiding van de nieuwe euromunten in twaalf EU-landen en drie Europese dwergstaatjes biedt kansen voor een bijzonder experiment, dat nooit meer herhaald kan worden.
Kunnen we wiskundig voorspellen hoe snel de munten van de diverse lidstaten zich verspreiden? Kunnen we aan de hand van peilingen het komende jaar conclusies trekken over het Europese geldverkeer? *Natuur & Techniek* zal komend jaar hierover regelmatig publiceren.

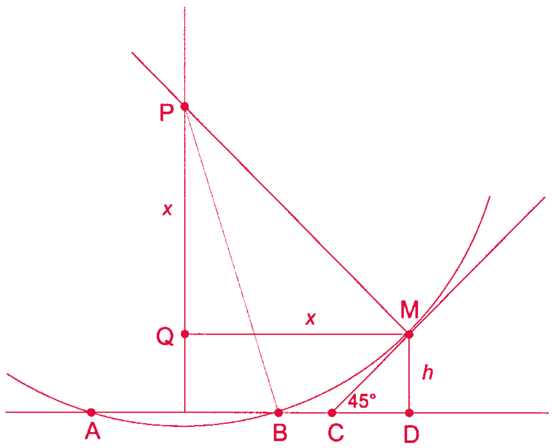
De *Studiegroep Wiskunde met de Industrie* wordt in 2002 georganiseerd door het Centrum voor Wiskunde en Informatica (CWI) en de Universiteit van Amsterdam. In februari 2002 buigen zo'n zestig wiskundigen uit heel Nederland zich een week lang over praktische problemen uit het bedrijfsleven en de industrie. De theorie van de verspreiding van euromuntjes is daar een van.

Voor meer informatie zie *http://www.wiskgenoot.nl/eurodiffusie* en *http://www.natutech.nl/*.
Scholen die willen meedoen, kunnen zich aanmelden op eerstgenoemde website.
Zie verder ook *http://www.cwi.nl/conferences/swi2002*.



Puzzel 7

Het vraagstuk is een variatie op een elegant ‘klassiek’ probleem
Nu is (zie de figuur) $AB = 1400\,m = 14\,hm$ (de breedte van het meer) en $BC = 200\,m = 2\,hm$ (de afstand van de voet van de heuvel tot het meer). Zij P het middelpunt van de cirkel die door A en B gaat en in M raakt aan de helling. Vanuit elk punt van deze cirkel wordt AB onder dezelfde hoek gezien (nl. de helft van hoek APB). Komen we buiten de cirkel, dan zal de bedoelde kijkhoek kleiner worden. Het is dus duidelijk dat die hoek in het punt M het grootst is.
Zij Q het voetpunt van M op de middelloodlijn van AB. We stellen $MQ = PQ = x$ en de hoogte MD waarop Marga zich bevindt, gelijk aan h.
Dan is de straal PM van de cirkel gelijk aan $x\sqrt{2}$. We werken verder met afstanden in hectometers.
Uit de figuur zien we $x = \frac{1}{2} \cdot 14 + 2 + h$, zodat $h = x - 9$.
Verder is volgens Pythagoras:
$(x + h)^2 + 7^2 = 2x^2$. Substitueren we in deze vergelijking de gevonden h, dan geeft dit $(2x - 9)^2 + 49 = 2x^2$. Hieruit volgt $x = 5$ of $x = 13$. Alleen $x = 13$ voldoet, zodat $h = 4$.
De gevraagde hoogte is dus $4\,hm = 400\,m$.
Marga zal het meer dan zien onder een hoek die gelijk is aan hoek $BPQ = \arctan\left(\frac{7}{17}\right) \approx 22{,}4°$.



Puzzel 8

We geven de oplossing (van L.J.H. Exalto) die voorkomt in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jaargang XIII (1925/1926), p. 247.

```
x / . . . . . . . . \ y
    . . . . .
    ---------
        . . . .
        . . . .
        -------
        . . . . .
        . . . . .
        ---------
                0
```

Bij de deling treden drie aftrekkers op, waarbij de tweede keer twee cijfers zijn aangehaald. Het quotiënt y bestaat dus uit vier cijfers, waarvan het tweede een 0 is. Omdat de som van de cijfers van y gelijk is aan 26 zijn er dus 2 negens en 1 acht bij. De tweede aftrekker is het kleinst, dus ook het tweede van 0 verschillende getal van y. Zodat $y = 9089$.
Nu is $9x$ gelijk aan een getal van 5 cijfers (zie de eerste en laatste aftrekker), zodat $9x \geq 10000$, waaruit we vinden dat $x > 1111$.
Is in het deeltal het cijfer van de honderdtallen een 4, dan is de som van de beide laatste aftrekkers hoogstens gelijk aan 99499, zodat $89x \leq 99499$, en dus $x < 1118$.
Het enige priemgetal dat tussen 1111 en 1118 ligt is 1117, zodat $x = 1117$ en $xy = 10152413$.
Is van het deeltal het cijfer der tientallen een 4, dan wordt $89x \leq 99949$, of $x < 1124$.
Naast 1117 ligt alleen het priemgetal 1123 tussen 1111 en 1124, zodat nu $xy = 10206947$.
We laten het aan de lezer de beide delingen, ter controle, uit te voeren.

Recreatie

[Dick Klingens]

Vooraf

Het zal geen der lezers verbazen, dat voor deze rubriek dit keer gekozen is voor een viertal meetkundeproblemen, waarvan er drie afkomstig zijn van Bottema.

Puzzel 9

In het schriftelijk examen KI van 1925, onderdeel Meetkunde, dat werd afgenomen op 9 september van dat jaar, vinden we een vraagstuk dat aardig aansluit bij het artikel van Floor van Lamoen in dit nummer (**zie pagina** 182).

Gegeven is een driehoek ABC. Op de zijden van dezen driehoek worden naar de buitenzijde driehoeken ABC', BCA', CAB' zoodanig geconstrueerd, dat:
$\angle C'AB = \angle BCA' = \angle C$, $\angle A'BC = \angle CAB' = \angle A$, $\angle B'CA = \angle ABC' = \angle B$.
Stel een voorwaarde op, waaraan de zijden a, b, c van driehoek ABC moeten voldoen opdat AA', BB' en CC' door één punt gaan.

Wellicht dat de vraagstelling had moeten luiden: 'Stel een zo eenvoudig mogelijke voorwaarde op, waaraan ...'.
Het onderzoek kan met elementaire meetkunde (o.a. met gebruik van de stelling van Ceva [1], en mogelijk gevolgd door wat analyse/algebra) worden gedaan, maar eenvoudig is anders.

Puzzel 10

In jaargang 13, 1925-1926, van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde vinden we onder nummer 1239 bij de 'Vraagstukken ter oplossing' een vraagstuk van O. Bottema (is dit zijn eerste publicatie in het Nieuw Tijdschrift?).

Uit het hoekpunt A van driehoek ABC worden twee rechten getrokken, die beide de overstaande zijde onder een hoek = $\angle A$ snijden. Men vraagt uit deze figuur de projectiestelling [2] voor b en c te bewijzen zonder gebruik te maken van het theorema van Pythagoras.

Puzzel 11

Ook in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, 52e jaargang (1964-1965), vinden we onder nummer 195 van de 'Vraagstukken ter oplossing' het volgende probleem, ingezonden door Prof. Dr. O. Bottema:

In welke gelijkbenige driehoek met gegeven basis is $R + r$ zo klein mogelijk?
R en r zijn opv. de stralen van de om- en ingeschreven cirkel van de driehoek.

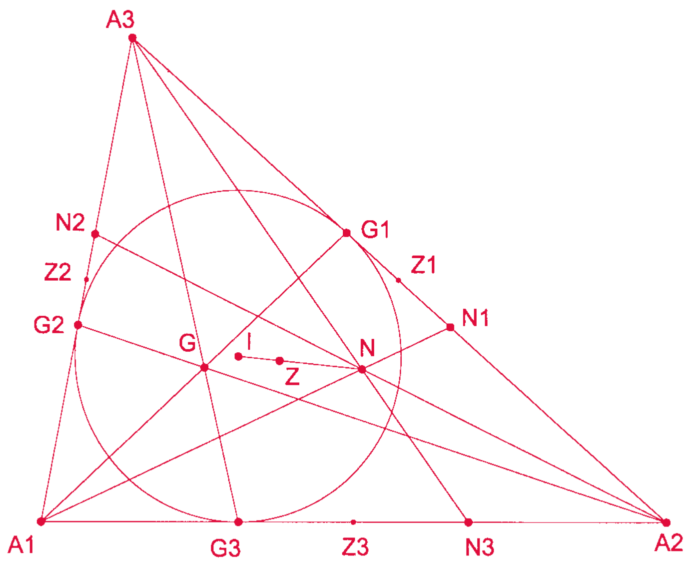
Dit vraagstuk draagt een laag nummer, hetgeen betekent, dat het bestemd was voor hen die zich voorbereidden op het examen Wiskunde MO-A. Er zal dus wel wat te differentiëren zijn.

Puzzel 12

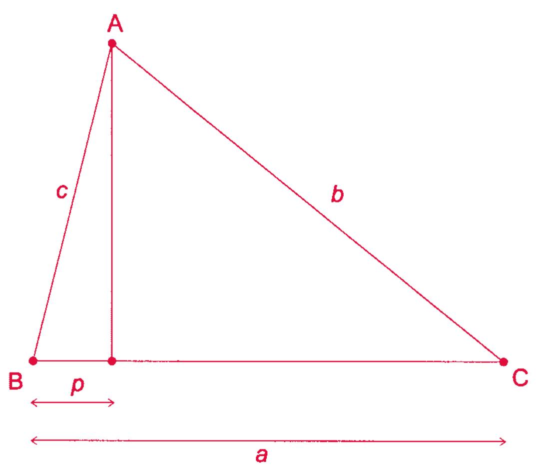
Op pagina 126 in diezelfde 52e jaargang staat ook een artikel van Bottema: In een driehoek beschreven ellipsen met gegeven oppervlakte. Een eigenschap die hij daarin aan de orde stelt, is de *isotomische verwantschap* van twee punten ten opzichte een driehoek [3]. Bottema behandelt deze verwantschap voor een ellips, maar we kunnen de zaak vereenvoudigen door de ingeschreven cirkel van de driehoek te nemen. In **figuur 1** is I het middelpunt van die cirkel. De raakpunten met de zijden zijn G_1, G_2, G_3.
(12.1)... De lijnen A_iG_i gaan nu door één punt G (dat het *punt van Gergonne* van de driehoek wordt genoemd). De punten N_i zijn de puntspiegelbeelden van G_i in de middens Z_i van de zijden.
(12.2)... De lijnen A_iN_i gaan nu ook door één punt N (het *punt van Nagel* van de driehoek). De punten G en N heten *isotomisch verwant* ten opzichte van de driehoek, omdat geldt:
$A_1G_3 = A_2N_3$, $A_3G_1 = A_2N_1$, $A_1G_2 = A_3N_2$.
Bewijs nu, onder verwijzing naar noot [1], de eigenschappen (12.1) en (12.2), en eventueel ook dat geldt: $NZ = 2ZI$, waarbij Z het zwaartepunt is van de driehoek.

Noten

[1] Zie voor de stelling van Ceva bijvoorbeeld, maar natuurlijk: O. Bottema: Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, Epsilon Uitgaven, Utrecht (1997), pp.8-13; of ook Dick Klingens: Homepage, http://www.pandd.demon.nl/transvers.htm; of P. Wijdenes: Vlakke meetkunde voor voortgezette studie, P. Noordhoff N.V., Groningen (3e druk, 1964), pp.106-109.
[2] De projectiestelling is de niet-goniometrische vorm van de cosinusregel: is p de projectie van de zijde c op de zijde a, dan is (zie figuur 2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ap$.
[3] De isotomische verwantschap komt ook aan de orde in Bottema's Hoofdstukken, XXV, pp.116-117.



FIGUUR 1



FIGUUR 2

Servicepagina

Kalender

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur. Hieronder treft u de voorlopige verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdata is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr	verschijnt	deadline
5	28 februari 2002	15 januari 2002
6	11 april 2002	26 februari 2002
7	23 mei 2002	08 april 2002
8	24 juni 2002	10 mei 2002

vrijdag 18 januari
1e ronde Nederlandse Wiskunde Olympiade

zaterdag 19 januari
Mathematische Modelleercompetitie, Maastricht
Organisatie Universiteit Maastricht

dinsdag 22 januari
Studiedag WisWeb applets in de wiskundeles
Organisatie FI en APS

vrijdag 1 en zaterdag 2 februari
Nationale Wiskunde Dagen, Noordwijkerhout
Organisatie Freudenthal Instituut

dinsdag 12 maart, woensdag 20 maart, donderdag 28 maart
Regionale studiebijeenkomsten (voorlopige data)
Organisatie NVvW

vrijdag 22 maart en zaterdag 23 maart
Finale Wiskunde A-lympiade, Garderen
Organisatie Freudenthal Instituut

vrijdag 22 maart
Kangoeroe-wedstrijd
Organisatie KUN; zie Euclides 77-2, p.54

donderdag 4 en vrijdag 5 april
38e Nederlands Mathematisch Congres, Eindhoven
Organisatie Wiskundig Genootschap

donderdag 25 april 2002
Conferentie ICT in het wiskundeonderwijs, Utrecht
Organisatie APS en Freudenthal Instituut; zie Euclides 77-2, p.63

Voor internet-adressen zie de website van de NVvW:
http://www.nvvw.nl/Agenda2.html

Publicaties van de
Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

* *Zebra-boekjes*
1. Kattenaids en Statistiek
2. Perspectief, hoe moet je dat zien?
3. Schatten, hoe doe je dat?
4. De Gulden Snede
5. Poisson, de Pruisen en de Lotto
6. Pi
7. De laatste stelling van Fermat
8. Verkiezingen, een web van paradoxen
9. De Veelzijdigheid van Bollen
10. Fractals

Prijzen van de Zebra-boekjes:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor *ƒ* 400,-
Individueel abonnement voor leden: *ƒ* 75,-
Losse boekjes voor leden: *ƒ* 16,50
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten.
Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbanknummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5) of Zebra (6 t/m 10).
Zelf ophalen kan in de losse verkoop; ledenprijs op bijeenkomsten *ƒ* 12,50; in de betere boekhandel *ƒ* 17,75.

* *Nomenclatuurrapport Tweede fase havo/vwo*
Dit rapport en oude nummers van Euclides (voor zover voorradig) kunnen besteld worden bij de ledenadministratie (zie Colofon).

* *Wisforta* - wiskunde, formules en tabellen
Formule- en tabellenboekje met formulekaarten havo en vwo, de tabellen van de binomiale en de normale verdeling, en toevalsgetallen.
ISBN 90 01 65956 X; prijs *ƒ* 15,00; te bestellen in de boekhandel.

* *Honderd jaar Wiskundeonderwijs*, lustrumboek van de NVvW
Het boek is met een bestelformulier te bestellen op de website van de NVvW (http://www.nvvw.nl/lustrumboek2.html).
Leden: *ƒ* 50,-; niet-leden: *ƒ* 62,50 (incl. verzendkosten).
Zie eventueel ook de advertentie in Euclides 76-7 (na p. 288).